วิธีลูกโซ่มาร์คอฟสำหรับการหาค่าคุณลักษณะของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียล สำหรับข้อมูลแบบล็อกนอร์มอล
A Markov Chain Approach for Evaluation Characteristics of EWMA Chart for Lognormal Observation

นพพร งามโสภาสิริสกุล[1] เสาวณิต สุขภารังษี[2]* และ ยุพาภรณ์ อารีพงษ์[2]
Nopporn Ngamsopasirisakun[1] Saowanit Sukparungsee[2]* and Yupaporn Areepong[2]

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponentially Weighted Moving Average: EWMA) สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล โดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) และหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมเพื่อออกแบบแผนภูมิ EWMA ให้มีความเหมาะสมกับขนาดของการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการ โดยกำหนดให้ δ มีค่าเท่ากับ 0.01, 0.05, 0.10, 0.50, 1.00, 1.50 และ 2.00 และ σ^2 มีค่าคงที่ ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมพิจารณาจากค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) โดยเปรียบเทียบความถูกต้องของการประมาณค่า ARL ของวิธีลูกโซ่มาร์คอฟด้วยผลลัพธ์จากวิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล พบว่าผลลัพธ์จากทั้งสองวิธีให้ค่าเหมือนกันแต่การจำลองแบบมอนติคาร์โลใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าวิธี MCA

คำสำคัญ: ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ การจำลองแบบมอนติคาร์โล ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม ค่าการตอบสนองอย่างรวดเร็ว

Abstract

The objective of this research is to study the approximation methods of the Average Run Length (ARL) for an Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control chart when observations are from Lognormal distribution using the Markov Chain Approach (MCA). Furthermore, this method be able to find the optimal parameters for designing an appropriate EWMA procedure when given a magnitude of changes of parameter where δ=0.01, 0.05, 0.10, 0.50, 1.00, 1.50 and 2.00 and σ^2 is a constant. The performance of the control chart is characterized by the ARL. The accuracy of the numerical results obtained from the MCA is compared

1 นักศึกษา ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
2 ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
* Corresponding Author, Tel. 0-2555-2000 Ext. 4903, E-mail: swns@kmutnb.ac.th

รับเมื่อ 14 มีนาคม 2555 ตอบรับเมื่อ 6 กรกฎาคม 2555

with the results obtained from the Monte Carlo simulation (MC) where they are in good agreement; however, the latter method takes much longer computational times than the former.

Keywords: Average Run Length, Markov Chain Approach, Monte Carlo simulation, Optimal Parameters, Fast Initial Response

1. บทนำ

ในปัจจุบันหลักสำคัญสำหรับการทำธุรกิจและอุตสาหกรรม คือกระบวนการผลิตสินค้าให้มีคุณภาพตรงตามมาตรฐานและเป็นที่เชื่อถือของผู้บริโภค แต่ในความเป็นจริงกระบวนการผลิตทุกประเภทนั้นมักมีความผันแปรดังนั้นผู้ผลิตจึงต้องมีการควบคุมคุณภาพของกระบวนการผลิตไม่ให้เกิดการผันแปรไปจากค่าเป้าหมาย โดยในกระบวนการควบคุมการผลิตได้แบ่งความผันแปรออกเป็นสองประเภท คือ ความผันแปรเชิงสุ่ม (Random Variation) เป็นความผันแปรที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ และความผันแปรที่ไม่เป็นเชิงสุ่มหรือความผันแปรที่ระบุสาเหตุได้ (Assignable Variation) เป็นความผันแปรที่เกิดขึ้นจากความผิดปกติที่อาจเกิดจาก บุคลากร วัตถุดิบ เครื่องจักร หรือวิธีการ ความผันแปรทั้งสองประเภทนี้สามารถควบคุมได้โดยการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (Statistical Process Control: SPC) ซึ่งเป็นกระบวนการที่ทำให้ความผันแปรลดลงและสามารถควบคุมการผลิตให้มีความสม่ำเสมอ โดย Dr. Walter. A. Shewhart เป็นผู้เสนอการใช้แผนภูมิเป็นคนแรก ในปี ค.ศ.1924 โดยแผนภูมิควบคุมมี 2 ประเภท คือแผนภูมิควบคุมเชิงแปรผัน (Control Charts for Variables) และแผนภูมิควบคุมเชิงลักษณะ (Control Charts for Attributes) เป็นแผนภูมิที่ได้รับความนิยมมากในการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ ซึ่งสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดใหญ่ สำหรับแผนภูมิที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็กคือแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponentially Weighted Moving Average: EWMA) [1]-[4] เป็นแผนภูมิที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็กได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม Shewhart โดยปกติแล้วเรามักจะศึกษาข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติแต่ในความเป็นจริงแล้วข้อมูลที่นำมาศึกษาเป็นไปได้ที่จะมีการแจกแจงในรูปแบบอื่นๆ เช่น การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution) เป็นการศึกษาถึงลักษณะข้อมูลของจำนวนของเสีย การแจกแจงแบบปัวซง (Poisson Distribution) เป็นการพิจารณาจำนวนรอยตำหนิหรือรอยขีดข่วน การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution) เป็นการวิเคราะห์ความเชื่อถือเกี่ยวกับอายุการใช้งานของวัตถุสิ่งของ โดยวัดตั้งแต่เวลาเริ่มต้นจนกระทั่งวัตถุนั้นเสื่อมสภาพ การแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) เป็นการศึกษาถึงเวลาที่รอคอยจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์สนใจเป็นครั้งแรก และการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล (Lognormal Distribution) เป็นข้อมูลที่อธิบายประชากรที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติ เช่น อุทกวิทยา โดยจะวิเคราะห์ค่าสูงสุดและต่ำสุดของแต่ละตัวแปร เช่น ปริมาณน้ำฝนรายวัน ปริมาณการปล่อยน้ำในแม่น้ำ หรือการวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ เป็นต้น

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษากระบวนการควบคุมคุณภาพโดยใช้แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponentially Weighted Moving Average: EWMA) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลที่ระดับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของกระบวนการมีขนาดเล็ก [5], [6] โดยวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมด้วยค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) โดยการวัดค่า ARL นั้น มี 2 สถานะ คือเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (in-control process) แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_0 และเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (out-of-control process) แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_1 วิธีการคำนวณค่า ARL นั้น โดยทั่วไปจะใช้วิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation: MC) ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าที่มีความถูกต้อง และแม่นยำ แต่เป็นที่ทราบกันว่าวิธี MC นั้น ใช้เวลาใน

การประมวลผลนาน ซึ่งทำให้เสียเวลา และค่าใช้จ่ายมากไปด้วย

โดยที่ Brook and Evans [7] ได้เสนอวิธีลูกโซ่มาร์คอฟสำหรับประมาณค่า ARL เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเสนอการประมาณค่า ARL โดยใช้วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล โดยวิธีนี้ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่า และผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำเทียบเท่ากับผลลัพธ์จากวิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล และสามารถออกแบบแผนภูมิควบคุม EWMA เพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลง โดยการหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมเมื่อกำหนดค่า ARL_0 และขนาดของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการ (δ) เพื่อสะดวกในการใช้แผนภูมิ EWMA ในการตรวจจับกระบวนการได้รวดเร็วขึ้น

2. ทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับแผนภูมิ EWMA

แผนภูมิ EWMA ได้ถูกนำเสนอโดย Robert [8] ซึ่งเป็นแผนภูมิที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้อย่างรวดเร็วโดยทั่วไปขนาดการเปลี่ยนแปลงที่สามารถตรวจจับได้จะเท่ากับ 1.5σ หรือต่ำกว่านั้น [6] มีตัวสถิติ EWMA ดังต่อไปนี้

$$Z_t = \lambda x_t + (1-\lambda)Z_{t-1} \qquad (1)$$

กำหนดให้ x_t คือค่าสังเกตจากกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล และ λ คือค่าถ่วงน้ำหนักของข้อมูลในอดีตมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กๆ ได้ในช่วง $0.05 \le \lambda \le 0.25$ โดยในงานวิจัยนี้กำหนดค่าเริ่มต้นของตัวสถิติ EWMA คือ

$$Z_0 = E(X) = e^{\alpha+\sigma^2/2} \qquad (2)$$

โดยตัวสถิติ EWMA สามารถเขียนให้อยู่ในสมการย้อนซ้ำ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda x_t + (1-\lambda)[\lambda x_{t-1} + (1-\lambda)Z_{t-2}] \\ &= \lambda x_t + (1-\lambda)x_{t-1} + (1-\lambda)^2 Z_{t-2}] \end{aligned}$$

แทนที่ Z_{t-k}; k=2, 3, ..., t ในสมการที่ (1) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Z_t = \lambda \sum_{k=0}^{t-1} (1-\lambda)^k x_{t-k} + (1-\lambda)^t Z_0 \qquad (3)$$

เมื่อค่าสังเกต x_t เป็นตัวแปรอิสระ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ α และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ดังนั้นจะได้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรนของ Z_t มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= e^{\alpha+\sigma^2/2}[\lambda + \lambda(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)^2 + \dots \\ &\quad + \lambda(1-\lambda)^{t-1} + \lambda(1-\lambda)^t] \\ &= e^{\alpha+\sigma^2/2}\lambda\left[\frac{1}{1-(1-\lambda)}\right] + e^{\alpha+\sigma^2/2}(1-\lambda)^t \\ &= e^{\alpha+\sigma^2/2} \end{aligned}$$

ความแปรปรวนของ Z_t คือ

$$\sigma^2_{Z_t} = \sigma^2\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]$$

โดยที่ $0 \le 1-\lambda \le 1$ และเมื่อ $t \to \infty$ จะได้ค่าความแปรปรวนซึ่งทำให้เกิดความแปรปรวนที่เรียกว่า Asymptotic Variance ดังนี้

$$\sigma^2_{asym} = \sigma^2_{Z_t} = \sigma^2\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$$

โดยขีดจำกัดควบคุมบน (Upper Control Limit: UCL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (Lower Control Limit: LCL) ของแผนภูมิ EWMA คือ

$$\begin{aligned} UCL &= h_U = E(Z_t) + L\sigma_{Z_t} \\ LCL &= h_L = E(Z_t) - E\sigma_{Z_t} \end{aligned}$$

เมื่อ L คือสัมประสิทธิ์ความกว้างของขีดจำกัดควบคุม

3. การประมาณค่า ARL_0 และ ARL_1 โดยวิธี MCA สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA

การแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลเหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเอนเอียงมากๆ หรือประกอบด้วยข้อมูลที่มีความแตกต่างกันมากๆ ซึ่งการแจกแจงแบบปกติจะไม่เหมาะกับข้อมูลประเภทแบบนี้ และการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลมีความเกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติ คือเมื่อตัวแปรสุ่ม Y คือ ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติโดยที่ค่าเฉลี่ย คือ α และความแปรปรวนคือ σ^2 ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $X = \exp[y]$ จะมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลซึ่งมีพารามิเตอร์ α และ σ^2 ดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบล็อกนอร์มอล คือ

$$f\ (x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \alpha)^2 \right] & ,\quad x > 0 \\ 0 & ,\quad x \le 0 \end{cases}$$

ดังนั้นค่าคาดหวังของการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล คือ

$$E(X) = e^{\alpha + \sigma^2/2}$$

และค่าความแปรปรวนของการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล คือ

$$V(X) = e^{2\alpha + 2\sigma^2} - e^{2\alpha + \sigma^2}$$

ในงานวิจัยนี้ใช้ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ในการวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA ซึ่งการประมาณค่า ARL มี 2 วิธี คือ วิธีการจำลองมอนติคาร์โล (MC) เป็นวิธีการคำนวณค่า ARL และใช้เป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA และการหาค่า ARL จากการจำลองแบบมอนติคาร์โล สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$ARL = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} RL_t$$

โดยกำหนดให้จำนวนครั้งของการจำลอง $N = 10^5$ และ RL_t คือจำนวนตัวอย่างที่ใช้ตรวจสอบจนกระทั่งพบกระบวนการออกนอกขีดจำกัดควบคุมเป็นครั้งแรก และการประมาณค่า ARL ด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ โดยการกำหนดจำนวนสถานะ x_j, j=1, 2, ..., n, n+1 แล้วเปลี่ยนสถานะหนึ่งไปยังสถานะอื่นๆ ด้วยเมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลง [1] หาได้ ดังนี้

$$\mathbf{P} = \left[p_{ij} \right]_{(n+1)\times(n+1)}$$

โดยที่

$$p_{ij} = P\left(X_{t+1} = x_j \middle| X_t = x_i\right)$$

กำหนด x_j, j=1, 2, ..., n เป็นสถานะเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม และ x_{n+1} เป็นสถานะเมื่อกระบวนการอยู่นอกเขตการควบคุม และสามารถแทนได้ด้วยเมทริกซ์ความน่าจะเป็น **P** โดยมีสมาชิกของเมทริกซ์ p_{ij} ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|c} p_{11} & \cdots & p_{1n} & p_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} & p_{n,\,n+1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \quad)\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]_{(n+1)\times(n+1)} \mathbf{Q}$$

เมื่อ

Q คือเมทริกซ์ย่อย ขนาด nxn สมาชิก p_{ij} สถานะ 1,...,n

I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) ขนาด nxn

1 คือเวกเตอร์หลัก (Row Vector) ขนาด 1xn สมาชิกทุกตัวมีค่าเท่ากับ 1

0 คือเวกเตอร์ศูนย์ ขนาด 1xn

1 คือสเกลาร์ที่มีค่าเท่ากับ 1
กำหนดเมทริกซ์ความน่าจะเป็นสถานะที่ k ในการประมาณค่า ARL เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง ในลำดับที่ k ดังสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^k & | & (\mathbf{I}-\mathbf{Q}^k)\mathbf{1}' \\ --- & - & ---- \\ \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $(I-\mathbf{Q}^k)\mathbf{1}'$ เป็นเวกเตอร์ของความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลงจากสถานะที่ $i < n+1$ ถึงสถานะที่ $n+1$ ในลำดับที่ k

$$ARL = \sum_{i=0}^{\infty} kP(RL = k) \tag{5}$$

แทนค่า $P(RL = k) = \mathbf{P}'(\mathbf{Q}^{k-1} - \mathbf{Q}^k)\mathbf{1}'$ แทนในสมการที่ (5) จะได้

$$\begin{aligned} ARL &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}'((i+1)\mathbf{Q}^{k-1} - i\mathbf{Q}^k)\mathbf{1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}'\mathbf{Q}^k\mathbf{1}' \\ &= \mathbf{P}'(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1} \end{aligned}$$

เมื่อ $\mathbf{P}'$ คือ ความน่าจะเป็นเริ่มต้น
สำหรับการคำนวณค่า ARL ด้วยวิธี MCA กำหนดให้ขีดจำกัดควบคุม $[O, h_U)$ แบ่งเป็นช่วงย่อยออกเป็น N ช่วง โดยที่ขีดจำกัดควบคุมล่าง (l_j) จุดกึ่งกลาง (m_i) และขีดจำกัดควบคุมบน (u_j) ของแต่ละช่วงย่อย i-th กำหนดดังสมการต่อไปนี้ตามลำดับ

ขีดจำกัดควบคุมล่าง คือ $l_j = \dfrac{(j-1)h_U}{N}$

จุดกึ่งกลาง คือ $m_i = \dfrac{(2i-1)h_U}{2N}$

ขีดจำกัดควบคุมบน คือ $u_j = \dfrac{(j)h_U}{N}$

ดังนั้นความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลง p_{ij} สามารถเขียนรูปสมการได้ดังนี้

$$p_{ij} = P[l_i < Z_t < u_i | Z_{t-1} = m_i] \tag{6}$$

โดยแทน $Z_t = \lambda x_t + (1-\lambda)Z_{t-1}$ ในสมการที่ (6) จะได้

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P[l_j < \lambda x_t + (1-\lambda)Z_{t-1} < u_j | Z_{t-1} = m_i] \\ &= P\left[\frac{(j-1)h_U}{N} < \lambda x_t + (1-\lambda)\frac{(2i-1)h_U}{2N} < \frac{(j)h_U}{N}\right] \\ &= P\left[\frac{(j-1)h_U}{N} - (1-\lambda)\frac{(2i-1)h_U}{2N} < \lambda x_t < \frac{(j)h_U}{N} - (1-\lambda)\frac{(2i-1)h_U}{2N}\right] \\ &= P\left[\frac{h_U}{2N}[2(j-1)-(1-\lambda)(2i-1)] < \lambda x_t < \frac{h_U}{2N}[2j-(1-\lambda)(2i-1)]\right] \\ &= P\left[\frac{h_U}{2N\lambda}[2(j-1)-(1-\lambda)(2i-1)] < x_t < \frac{h_U}{2N\lambda}[2j-(1-\lambda)(2i-1)]\right] \end{aligned}$$

โดยค่า p_{ij} ใช้ในการหาค่าเมทริกซ์ $\mathbf{Q}$ และค่า ARL

3. ผลและอภิปราย

จากการวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลด้วยค่า ARL โดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA) และวิธีการจำลองมอนติคาร์โล (MC) โดยค่า ARL มี 2 สถานะ คือเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_0 และเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_1 การนำเสนอผลการวิจัยได้แบ่งออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้

3.1 การแสดงขอบเขตควบคุมของแผนภูมิ EWMA

ตารางแสดงค่า h_U ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม ในแต่ละระดับค่า λ เมื่อ $\text{ARL}_0 = 300$ และ 500 แสดงดังนี้

จากตารางที่ 1 พบว่าเมื่อค่าของแผนภูมิ EWMA มีการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นแล้วค่าขีดจำกัดควบคุมบน (h_U) นั้นมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน

ตารางที่ 1 ค่า h_U ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม ในแต่ละระดับค่า λ เมื่อ $ARL_0 = 300$ และ 500

λ	h_U	
	$ARL_0 = 300$	**$ARL_0 = 500$**
0.01	1.6150	1.7737
0.02	1.8926	2.0309
0.03	2.0842	2.2351
0.04	2.2518	2.4218
0.06	2.5577	2.7716
0.08	2.8450	3.1061
0.10	3.1231	3.4330
0.15	3.7988	4.2347
0.20	4.4620	5.0273
0.30	5.7774	6.6060

3.2 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 และเวลาประมวลผล

โดยการคำนวณด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA) จำนวนโนดเท่ากับ 600 โนด และวิธีการจำลองมอนติคาร์โล (MC) ด้วยโปรแกรม R จำนวนรอบของการทำซ้ำ 100,000 รอบ ดังตารางที่ 2 และ 3

ตารางที่ 2 ค่า ARL_1 และ CPU Times ของแผนภูมิควบคุม EWMA ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี MCA และ MC ในแต่ละระดับ $\lambda = 0.01$ และ 0.02 เมื่อ $ARL_0 = 300$

λ	δ	MCA		MC	
		ARL_1	**CPU Times (Sec.)**	**$ARL_1 \pm$ SD.**	**CPU Times (Sec.)**
0.01 (h_U=1.6150)	0.01	287.742	48.298	288.710 ±0.346	1262.420
	0.05	247.352	52.042	247.664 ±0.264	1171.650
	0.10	210.556	52.807	210.923 ±0.201	908.081
	0.50	91.971	53.602	92.004 ±0.064	384.386
	1.00	46.271	40.670	46.255 ±0.034	207.419
	1.50	26.120	50.638	26.191± 0.022	110.464
	2.00	15.612	44.585	15.624 ±0.015	70.138
0.02 (h_U= 1.8926)	0.01	282.015	37.628	280.982± 0.581	1236.310
	0.05	225.409	36.785	225.399± 0.420	975.240
	0.10	177.994	37.128	178.471 ±0.295	775.263
	0.50	61.204	50.638	61.261 ±0.060	256.653
	1.00	29.083	48.392	29.131 ±0.027	130.885
	1.50	16.270	37.768	16.325 ±0.017	69.093
	2.00	9.819	37.113	9.824 ±0.011	44.804

ตารางที่ 3 แสดงค่า ARL_1 และ CPU Times ของแผนภูมิควบคุม EWMA ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี MCA และ MC ในแต่ละระดับ $\lambda = 0.01$ และ 0.02 และ เมื่อ ARL_0=500

λ	δ	MCA		MC	
		ARL_1	**CPU Times (Sec.)**	**$ARL_1 \pm$ SD**	**CPU Times (Sec.)**
0.01 (h_U=1.7737)	0.01	467.292	37.581	467.301 ±0.780	2091.050
	0.05	369.218	36.988	369.706 ±0.530	1558.980
	0.10	292.209	36.863	292.919 ±0.354	1302.890
	0.50	107.460	37.019	107.548 ±0.076	483.556
	1.00	52.003	36.941	52.006± 0.037	231.334
	1.50	28.925	37.206	28.943 ±0.023	123.724
	2.00	17.136	36.941	17.129 ±0.016	74.023
0.02 (h_U=2.0309)	0.01	461.080	37.627	453.650 1.086	2058.370
	0.05	343.187	36.582	340.767 0.750	1485.320
	0.10	251.773	36.380	251.757 0.493	1084.050
	0.50	70.007	36.379	69.912 0.071	311.207
	1.00	31.862	36.505	31.863 0.029	142.398
	1.50	17.563	36.551	17.602 0.018	75.083
	2.00	10.507	36.973	10.499 0.012	47.549

จากตารางที่ 2 และ 3 เป็นกรณีที่กระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม เมื่อค่า ARL_0=300 และ 500 ตามลำดับ พบว่าการคำนวณค่า ARL_1 ด้วยวิธี MCA ได้ผลลัพธ์เทียบเท่ากับวิธี MC และเมื่อพิจารณาเวลาในการประมวลผล พบว่าผลลัพธ์จากวิธี MC ใช้เวลาประมาณ 21 นาทีต่อ 1 กรณีศึกษา แต่เมื่อใช้วิธี MCA ปรากฏว่าใช้เวลาในการคำนวณโดยประมาณ 38 วินาที ต่อ 1 กรณีศึกษา ดังนั้นสรุปได้ว่า วิธี MCA ใช้เวลาในการคำนวณค่า ARL ได้เร็วกว่ามาก

3.3 การหาคู่พารามิเตอร์ที่เหมาะสม (Optimal Parameters)

ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่า ARL_1 ในแต่ละระดับ δ ซึ่งแสดงคู่พารามิเตอร์ที่เหมาะสม (λ, h_U) เมื่อคำนวณด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟแสดงดังตารางที่ 4 และ 5

จากตารางที่ 4 สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ ARL_0 = 300 ที่ระดับการเปลี่ยนแปลง $\delta = 0.01$ คู่พารามิเตอร์ที่

เหมาะสมของแผนภูมิ EWMA ที่ทำให้ค่า ARL_1 ที่ต่ำที่สุดนั้น คือ $(\lambda = 0.032, h_U = 2.119)$ หมายถึงคู่พารามิเตอร์ที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีที่สุด

ตารางที่ 4 ค่าพารามิเตอร์ (λ, h_U) ที่เหมาะสมของแผนภูมิควบคุม EWMA ในแต่ละระดับ δ เมื่อ $ARL_0 = 300$

δ	λ	h_U
0.01	0.032	2.1190
0.05	0.036	2.1865
0.10	0.040	2.2518
0.50	0.081	2.8732
1.00	0.146	3.7453
1.50	0.223	4.7653
2.00	0.319	6.0268

ตารางที่ 5 ค่าพารามิเตอร์ (λ, h_U) ที่เหมาะสมของแผนภูมิควบคุม EWMA ในแต่ละระดับค่า δ เมื่อ $ARL_0 = 500$

δ	λ	h_U
0.01	0.019	2.0087
0.05	0.023	2.0950
0.10	0.028	2.1961
0.50	0.064	2.8394
1.00	0.119	3.7395
1.50	0.185	4.7900
2.00	0.264	6.0379

จากตารางที่ 5 สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 500$ ที่ระดับการเปลี่ยนแปลง $\delta = 0.01$ คู่พารามิเตอร์ที่เหมาะสมของแผนภูมิ EWMA ที่ทำให้ค่า ARL_1 ที่ต่ำที่สุดนั้น คือ $(\lambda = 0.019, h_U = 2.0087)$ หมายถึงคู่พารามิเตอร์ที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีที่สุด เป็นต้น

ดังนั้น จากตารางที่ 4 และ 5 พบว่าวิธี MCA นั้นมีประสิทธิภาพในการหาคู่พารามิเตอร์ที่เหมาะสม ได้ดีกว่าวิธี MC เนื่องจากลดเวลาในการประมวลผล ทั้งนี้สามารถนำคู่พารามิเตอร์ที่ได้จากตารางที่ 4 และ 5 ไปใช้ได้อย่างเหมาะสมกับขนาดของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิค่าพารามิเตอร์

ตารางที่ 6 ค่าเริ่มต้น Z_0 เพื่อการตอบสนองอย่างรวดเร็ว (FIR) ของแผนภูมิควบคุม EWMA ในแต่ละระดับค่า δ เมื่อ $ARL_0 = 300$

δ \ Z_0	0	$0.25h_U$	$0.5h_U$	$0.75h_U$
0	300.005	295.325	280.697	265.412
0.01	280.990	284.825	267.587	234.335
0.05	219.903	210.133	195.484	168.313
0.1	167.217	158.774	146.267	123.750
0.5	38.349	35.110	30.792	24.395
1.0	12.953	11.669	10.079	7.969
1.5	6.097	5.498	4.789	3.908
2.0	3.453	3.155	2.814	2.416

จากตารางที่ 6 เป็นการศึกษาค่าเริ่มต้น Z_0 เพื่อการตองสนองอย่างรวดเร็ว (FIR) ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าพาราเตอร์ของแผนภูมิควบคุม EWMA ผลจากงานวิจัย พบว่าค่าเริ่มต้นของ Z_0 เท่ากับ $0.75h_U$ ทำให้ค่า ARL_1 มีค่าต่ำสุดทุกระดับการเปลี่ยนแปลง อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาค่า ARL_0 พบว่ามีลักษณะลดลงเมื่อค่าเริ่มต้น Z_0 เพิ่มขึ้น โดยค่าเริ่มต้น Z_0 ที่ควรเลือกใช้นั้น ควรพิจารณาจากทั้งสองค่าของ ARL_0 และ ARL_1 พร้อมๆ กัน ดังนั้นค่าเริ่มต้น $Z_0 = 0.5h_U$ จึงเป็นค่าที่เหมาะสมสำหรับงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] J.M. Lucas and M.S. Saccucci, "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements," *Technometrics,* vol. 32, pp. 1-29, 1990.

[2] F.F. Gan, "Designs of one-side and two-sided Exponential EWMA Chart," *Journal of Quality Technology*, vol. 30, pp. 55-69, 1998.

[3] C.M. Borror, D.C. Montgomery, and G.C. Runger, "Robustness of the EWMA Control Chart to Nonnormality," *Journal of Quality Technology*,

vol. 31, pp.309-316, 1999.

[4] S. Knoth, "Fast initial response features for EWMA control charts," *Statistical Papers*, vol. 46, pp. 47-64, 2003.

[5] S.V. Crowder, "A Simple Method for Studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts," *Technometrics*, vol. 29, pp. 401-407, 1987.

[6] D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2001.

[7] D. Brook and D.A. Evans, "An approach to the probability distribution of Cusum run length," *Biometrika*, vol, 59, pp. 539-548, 1972.

[8] S.W. Roberts, "Control chart tests based on geometric moving average," *Technometrics*, vol. 1, pp. 239-250, 1959.