การแผ่คลื่นจากไดโพลไฟฟ้าระริกระรัวสำหรับตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่

(Radiation from an Oscillating Electric Dipole in a Moving Medium)

ผศ. อุทัย แก้วภราดัย*

บทคัดย่อ

การแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากไดโพลไฟฟ้าระริกระรัว ไปยังตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่ต้องใช้หลักทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า และสัมพัทธภาพเฉพาะ ในบทความเรื่องนี้เราได้อธิบายหลักทั้งสองนี้ และใช้มันหาความเข้มสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กสำหรับตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่

Abstract

Electromagnetic radiation from an oscillating electric dipole in a moving medium requires knowledge of electromagnetism and the relativity principle. In this article and magnetic fields in a moving medium.

1. บทนำ

การแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าไปยังตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่เป็นเรื่องที่สำคัญมากเรื่องหนึ่ง ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนคือการรับคำสั่งในจรวดสำรวจอวกาศจากห้องบังคับควบคุมบนพื้นโลก การที่จะเข้าใจการส่งรับคลื่นแบบนี้ได้ เราต้องเข้าใจทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าและทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะของอัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ในบทความเรื่องนี้เราจะกล่าวถึงการแผ่คลื่นจากไดโพลไฟฟ้า สำหรับตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่ การที่พิจารณาแต่เพียงไดโพลก็เพื่อวางรากฐานทฤษฎี - ปฏิบัติ สำหรับกรณีอย่างง่ายระดับมูลฐาน ซึ่งจะเป็นพื้นฐานของระบบจริงของสายอากาศแบบยุ่งยาก

2. หลักทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ

มีหลักที่สำคัญสองประการคือ

ประการแรก กฎทางฟิสิกส์ต้องมีรูปทางคณิตศาสตร์เหมือนกันหมดในทุกระบบเฉื่อย ระบบเฉื่อยคือระบบที่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์สม่ำเสมอหรือคงที่

เมื่อนำมาใช้กับเรื่องแม่เหล็กไฟฟ้า หลักสัมพัทธภาพข้อนี้หมายความว่า สมการแมกซ์เวลล์ต้องมีรูปไม่เปลี่ยน (form invariant) สำหรับระบบที่อยู่กับที่ S และระบบที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ S'

ประการที่สอง ความเร็วของแสงในอวกาศว่างเปล่ามีค่า C เท่ากันหมด สำหรับทุกระบบเฉื่อย (c ประมาณเท่ากับ 2.998×10^{8} เมตรต่อวินาที)

สมมติว่ามีกระจุกพลังงานของแสงเปล่งออกมาจากจุดตั้งต้นของระบบ S และ S' ซึ่งซ้อนทับกัน

---

* **ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ**

เมื่อเวลา t = t' = 0 แล้วหน้าคลื่น (wavefront) ของระบบ S' ต้องเป็นไปตามสมการ

$$\bar{r}'^2 - c^2 t'^2 = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

และหน้าคลื่นเดียวกันสำหรับระบบ S' ต้องเป็นไปตามสมการ

$$\bar{r}^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

สมการแม็กซ์เวลล์ในระบบ S คือ

$$\text{curl } \bar{E} = \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{.....(3)}$$

$$\text{curl } \bar{H} = \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \text{.....(4)}$$

$$\text{div } \bar{D} = \nabla \cdot \bar{D} = p \qquad \text{.....(5)}$$

$$\text{div } \bar{B} = \nabla \cdot \bar{B} = O \qquad \text{.....(6)}$$

ตามหลักสัมพัทธภาพเฉพาะ สมการแม็กซ์เวลล์ในระบบ S' ต้องเป็น

$$\nabla \times \bar{E}' = -\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t} \qquad \text{.....(7)}$$

$$\nabla \times \bar{H}' = \bar{J}' + \frac{\partial \bar{D}'}{\partial t'} \qquad \text{.....(8)}$$

$$\nabla . \bar{D}' = p' \qquad \text{.....(9)}$$

$$\nabla . \bar{B}' = O \qquad \text{.....(10)}$$

การแปลงจากระบบ S เป็น S' เราต้องใช้การแปลงลอเร็นทซ์ (Lorentz transformation) ดังนี้

$$\bar{r}' = \bar{\bar{L}} . \bar{r} - \gamma \bar{v} t \qquad \text{.....(11)}$$

$$t' = \gamma \, (t - \bar{m} . \bar{r}) \qquad \text{.....(12)}$$

โดยที่

$$\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{I}} + (\gamma - 1) \, \hat{v} \, \hat{v} \qquad \text{.....(13)}$$

$$\bar{\bar{I}} \text{ คือ แม็ตตริกซ์หน่วย } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{.....(14)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{.....(15)}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{.....(16)}$$

$\hat{v}$ คือหน่วยเว็กเตอร์ (unit vector) ในทิศทางของ $\bar{v}$ ซึ่ง $\bar{v}$ คือ ความเร็วของระบบ S'

ในระบบ S นั้น $\overline{v} = 0$ คือ S อยู่กับที่ .....(17)

$$\overline{m} = \frac{\overline{v}}{c^2} \quad .....(18)$$

3. การแปลงเว็กเตอร์ต้นตอและสนาม

ยังมีสมการอีกสมการหนึ่ง เพิ่มไปจากสมการแม็กซเวลล์ เราเรียกว่า สมการการต่อเนื่อง ซึ่งส่วนเพิ่มของความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าคือ อัตราการเปลี่ยนของประจุไฟฟ้า

$$\Delta . \overline{J} = -\frac{\partial p}{\partial t} \quad .....(19)$$

ความหนาแน่นกระแสและความหนาแน่นประจุแปลงตามสมการ (20) และ (21) คือ

$$J' = \overline{\overline{L}}.\overline{J} - \gamma \overline{v} d \quad .....(20)$$

$$p' = \gamma \left(p - \frac{\overline{v}.\overline{J}}{c^2}\right) \quad .....(21)$$

ความหนาแน่นกระแสและความหนาแน่นประจุเป็นต้นตอที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

ความเข้มสนามแม่เหล็ก $\overline{H}'$ และความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า $\overline{D}'$ แปลง ดังนี้

$$\overline{H}' = \gamma \left(\frac{1}{\overline{\overline{L}}}.\overline{H}.\overline{v} \times \overline{D}\right) \quad .....(22)$$

$$\overline{D}' = \gamma \left(\frac{1}{\overline{\overline{L}}}.\overline{D} + \frac{\overline{V} x \overline{H}}{c^2}\right) \quad .....(23)$$

การแปลงของความเข้มสนามไฟฟ้า $\overline{E}'$ และความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\overline{B}'$ คือ

$$\overline{E}' = \gamma \left(\frac{1}{\overline{\overline{L}}}.\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}\right) \quad .....(24)$$

$$\overline{B}' = \gamma \left(\frac{1}{\overline{\overline{L}}}.\overline{B} - \frac{\overline{v} x \overline{E}}{c^2}\right) \quad .....(25)$$

4. ความเร็วของการส่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

จากสมการแม็กซ์เวลล์ เราอาจแสดงให้เห็นว่าสนามไฟฟ้า $\overline{E}$ คล้องตามสมการคลื่น

$$\nabla^2 \overline{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} \quad .....(26)$$

คลื่นระนาบ (plane wave) คือ คลื่นที่มีขนาดคลื่น (wave amplitude) คงที่ตลอดทุกจุดของระนาบที่เราลากตั้งฉากกับทิศทางของการแผ่กระจายคลื่น ถ้า ψ แทนองค์ประกอบใดๆ ของ $\overline{E}$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad .....(27)$$

ความเร็วของการแผ่กระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad .....(28)$$

ในคลื่นระนาบขนาดคลื่นเป็นฟังก์ชั่นของระยะทางตั้งฉากจากจุดตั้งต้นถึงหน้าคลื่นเท่านั้น นั่นคือ

$\psi = \psi\ (\xi, t)$ .....(29)

ξ คือ ระยะทางตั้งฉาก

คลื่นระนาบเป็นการประมาณที่ดีของคลื่นจริง เช่น คลื่นแสงและคลื่นวิทยุที่อยู่ไกลออกไปจากสายอากาศ

เราให้คำจำกัดความเว็กเตอร์การส่งกระจายคลื่น $\bar{k}$ เป็น

$\bar{k} = k\hat{n}$ .....(30)

เราสมมติว่าการขึ้นอยู่กับเวลาของ ψ เป็นแฟ็กเตอร์ $e^{-i\omega t}$ นั่นคือส่วนจริงเป็น sinusoidal (เป็นแบบซายน์หรือคอส) ดังนั้น

$\psi\ (\bar{r}, t) = A_{\bar{k}} e^{i\ (\bar{k}.\bar{r} - \omega t)} + B_{\bar{k}} e^{i\ (\bar{k}.\bar{r} - \omega t)}$ .....(31)

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กมีสมการเป็น

$\bar{E}\ (\bar{r}, t) = \bar{E}_o\, e^{i\,(\bar{k}.\bar{r} - \omega t)}$ .....(32)

$\bar{E}\ (\bar{r}, t) = \bar{H}_o\, e^{i\,(\bar{k}.\bar{r} - \omega t)}$ .....(33)

สำหรับตัวกลางที่ไม่นำไฟฟ้าและสม่ำเสมอ $\nabla.\bar{E} = 0$ นั่นคือ

$\nabla.\ \bar{E}_o\, e^{i\,(\bar{k}.\bar{r} - \omega t)} = 0$ .....(34)

เราได้

$\bar{k}\ .\ \bar{E}_o = 0$ .....(35)

และ $\bar{k}\ .\ \bar{H}_o = 0$ .....(36)

และจากสมการของแม็กซ์เวลล์เช่นกัน

$\nabla \times \bar{E} = \nabla\,[e^{i(\bar{k}.\bar{r} - \omega t)}] \times \bar{E}_o$

$= ik \times \bar{E}$ .....(37)

จากกฎของฟาราเดย์

$\bar{k} \times \bar{E} = \omega\mu\bar{H}$ .....(38)

เว็กเตอร์ ($\bar{E}, \bar{H}, \bar{k}$) ประกอบขึ้นเป็นชุดตั้งฉากทางขวามือ (right - handed orthogonal set)

ในสูญญากาศ ความเร็วเฟส (phase velocity) ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็น

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.998 \times 10^8$ เมตร/วินาที โดยประมาณ .....(39)

จากผลของการทดลองอย่างรอบคอบมากหลายๆ อย่าง เขาพบว่าความเร็วของแสงในสูญญากาศ $c = 2.998 \times 10^8$ เมตร / วินาที

โดยประมาณเช่นกัน .....(40)

เฮิร์ซ ได้แสดงให้เห็นโดยการทดลองว่า การทำนายของแม็กซ์เวลล์เกี่ยวกับการส่งกระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นความจริง เฮิร์ตซ์ทำการทดลองเป็นผลสำเร็จเมื่อปี ค.ศ. 1887

5. ความสัมพันธ์มินโคสกี้ (Minkowski constitutive relation) ของตัวกลางไอโซโทรปิกที่เคลื่อนที่

สำหรับตัวกลางแบบไอโซโทรปิกที่ไม่สูญเสีย ซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับระบบ S' (เราเรียกว่าโครงอยู่นิ่งของตัวกลาง) เราเขียนได้ว่า

$$\overline{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \, \overline{E}' \quad \text{.....(41)}$$

$$\overline{E}' = \mu_0 \mu \, . \overline{H}' \quad \text{.....(42)}$$

โดยที่ ε และ μ เป็นตัวคงที่ไดอิเล็กตริก และความซึมซาบสัมพันธ์ของตัวกลางในระบบมีขีด (primed system) ในกรณีนี้ตัวกลางเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $\overline{v}$ เทียบกับ S (ซึ่งเราเรียกว่า โครงห้องทดลอง) เราสามารถแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์คอนสทิทิวทิฟใน S เป็น

$$\overline{D} + \frac{\overline{v}X\overline{H}}{c^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \, (\overline{E} + \overline{v}X\overline{B}) \quad \text{.....(43)}$$

$$\overline{B} + \frac{\overline{v}X\overline{E}}{c^2} = \mu_0 \mu \, (\overline{H} + \overline{v}X\overline{D}) \quad \text{.....(44)}$$

โดยทางคณิตศาสตร์ เราสามารถหาค่าของ $\overline{D}$ และ $\overline{B}$ ในรูปแบบที่สะดวกในการใช้ความสัมพันธ์ที่ได้มานี้มีชื่อเรียกว่าความสัมพันธ์คอนสทิทิวทิฟมินโคสกี้ ได้แก่

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \, \overline{\overline{\alpha}} . \overline{E} + \frac{1}{c}(\overline{m} \text{ X } \overline{\overline{I}}) . \overline{H} \quad \text{.....(45)}$$

$$\overline{D} = \frac{1}{c}(\overline{m} \text{ X } \overline{\overline{I}}) . \overline{E} + \mu_0 \mu \, \overline{\overline{\alpha}} . \overline{H} \quad \text{.....(46)}$$

โดยที่

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha \overline{\overline{I}} + (1 - \alpha) \hat{v} \hat{v} \quad \text{.....(47)}$$

$$\alpha = \frac{1-\beta^2}{1-\mu\varepsilon\beta^2} \quad \text{.....(48)}$$

$$\overline{m} = m \hat{v} \quad \text{.....(49)}$$

$$m = \frac{\beta(\mu\varepsilon - 1)}{1-\mu\varepsilon\beta^2} \quad \text{.....(50)}$$

6. การแผ่คลื่นจากไดโพลไฟฟ้าระริกระรัว

เราให้ $\overline{r}$ เป็นระยะทางจุดสนาม (field point) และ $\overline{r}'$ เป็นระยะทางจุดต้นตอ (source point)

การกระจายกระแสของไดโพลจุดที่มีโมเม้นต์ไดโพลไฟฟ้า $\overline{p}_o$ ตั้งอยู่ที่จุดตั้งต้น เราแสดงออกได้เป็น

$$\overline{J}(\overline{r}') = I \omega \overline{p}_0 \, \delta(\overline{r}') \quad \text{.....(51)}$$

โดยการใช้คุณสมบัติของเดลต้าฟังก์ชั่น และแทนค่า $\bar{J}(\bar{r}')$ ลงในสมการสนามไฟฟ้า

$$\bar{E}(\bar{r}) = i\,\omega\mu_o \int_V \bar{\bar{G}}(\bar{r},\bar{r}')\,.\bar{J}(\bar{r}')\,d^3r'$$

เราได้ว่า $\bar{E}(\bar{r}) = \omega^2\mu_o\,\bar{\bar{G}}(\bar{r}\,/\,\bar{O},\omega)\,.\,\bar{p}_o$ .....(52)

ผลสุดท้ายเราสามารถเขียนสมการสำหรับ $\bar{E}(\bar{r})$ ได้เป็น

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{\varepsilon_o}\{2\left(\frac{1}{\varepsilon r^2}-\frac{ik_o}{\sqrt{\varepsilon r}}\right)(\bar{p}_o.\hat{r})\hat{r}$$

$$+\left(\frac{1}{\varepsilon r^2}-\frac{ik_o}{\sqrt{\varepsilon r}}-k_o^2\right)[\hat{r}\times\bar{p}_o)]\}\,g(\bar{r},\omega) \qquad .....(53)$$

และ $\bar{H}(\bar{r})$ ได้เป็น

$$\bar{H}(\bar{r}) = i\omega\left(\frac{1}{r}-ik_o,\sqrt{\varepsilon}\right)g(\bar{r},\omega)(\hat{\bar{r}}\times\bar{p}_o) \qquad .....(54)$$

7. การแผ่คลื่นจากไดโพลไฟฟ้าระริกระรัวในตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่

เรามาพิจารณาสนามที่แผ่ออกมาจากไดโพลไฟฟ้าระริกระรัวที่มีความถี่ สำหรับกรณี $\beta < 1/\sqrt{\mu\omega}$ เราให้ไดโพลอยู่ที่จุดตั้งต้น ถ้า $\bar{p}_o$ เป็นโมเม้นต์ไดโพลของมันแล้วการกระจายกระแสของไดโพลคือ

$$\bar{J}(\bar{r}') = i\omega\,\bar{p}_o\,\delta(\bar{r}') \qquad .....(55)$$

สมการของแม็กซ์เวลล์คือ

$$\nabla\times\bar{E} = i\omega\bar{B} \qquad .....(56)$$

$$\nabla\times\bar{H} = -i\omega\bar{D}+\bar{J} \qquad .....(57)$$

โดยการแทนค่าตามวิธีทางคณิตศาสตร์ เราจะได้สมการสำหรับ $\bar{E}$ และ $\bar{H}$ ในกรณีของตัวกลางไอโซโทรปิกที่กำลังเคลื่อนที่ เราเรียกว่า สมการแม็กซ์เวลล์มินโคสกี้ดังต่อไปนี้

$$(\nabla + ik_o\,\bar{m})\times\bar{E} = i\omega\mu_o\mu\,\bar{\bar{\alpha}}\,.\bar{H} \qquad .....(58)$$

$$(\nabla + ik_o\,\bar{m})\times\bar{H} = -i\omega\varepsilon_o\,\bar{\bar{\alpha}}\,.\bar{E}+\bar{J} \qquad .....(59)$$

โดยการแก้สมการ (58) และ (59) สำหรับ $\bar{E}$ แล้วหาคำตอบแบบทั่วไป เราเขียนคำตอบสำหรับ $\bar{E}$ ได้เป็น

$$\bar{E}(\bar{r}) = i\omega\mu_o\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\bar{G}}(\bar{r},\bar{r}')\,.\,\bar{J}(\bar{r}')\,d^3r' \qquad .....(60)$$

แทน (55) ลงในสมการ (60) เราได้สนามไฟฟ้าของไดโพลที่แผ่คลื่นในตัวกลาง ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ดังนี้

$$\bar{E}(\bar{r}) = \omega^2\mu_o\mu\,\bar{\bar{G}}(\bar{r},\bar{o})\,.\,\bar{p}_o \qquad .....(61)$$

โดยที่เราคำนวณไดอาดิกกรีนฟังก์ชั่น $\bar{\bar{G}}(\bar{r},\bar{o})$ ที่ $\bar{r}' = \bar{o}$ โดยการแทนค่ากรีนฟังก์ชั่นลงในสมการ (61) เราได้

$$\overline{E}(\bar{r}) = \omega^2\mu_O\mu\alpha\, G_m(\bar{r},\omega)\,[(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\ \bar{p}_o -$$

$$\frac{\bar{p}_o.\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\bar{r}}{r_v^2}(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\ \bar{r}) + \sqrt{\frac{\mu_o\mu}{\varepsilon_o\varepsilon}}\ \frac{\omega G_m(\bar{r},\omega)}{r_V}$$

$$[(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\ \bar{p}_o) - \frac{3\bar{p}_o.\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\bar{r}}{r_v^2}(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\ \bar{r})] - \frac{G_m(\bar{r},\omega)}{\alpha\varepsilon_o\varepsilon r_v^2}$$

$$[(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\ \bar{p}_o) - \frac{3(\bar{p}_o.\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\bar{r})}{r_v^2}(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\ \bar{r})] \qquad .....(62)$$

โดยที่ $G_m(\bar{r},\omega) = \dfrac{\exp[ik_O(\alpha\sqrt{\mu\varepsilon}r_V - \overline{m}.\bar{r})]}{4\pi r_V}$ .....(63)

และ $r_v = \sqrt{\bar{r}.\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\bar{r}}$ .....(64)

และจากสมการ (58) เราสามารถหาสนามแม่เหล็กได้เช่นกัน สำหรับช่วงไกล (far - zone) ผลที่ได้ง่ายขึ้นมาก คือเราได้

$$\overline{E}(\bar{r}) = \frac{\omega^2\mu_o\mu G_m(\bar{r},\omega)}{(\bar{r}\times\bar{v})^2}\{(\bar{r}.\frac{\wedge}{V}\times\overline{p}_o)(\bar{r}\times\frac{\wedge}{V})$$

$$+\frac{\bar{r}.\frac{\wedge}{V}(\bar{r}.\bar{p}_o)-r^2(\bar{p}_o.\frac{\wedge}{V})}{r_v^2}[\bar{r}\times\frac{\wedge}{V})]\} \qquad .....(65)$$

สนามแม่เหล็กช่วงไกล เราหาได้จากสมการแม็กซ์เวลล์ โดยถือว่า $\bar{p}_o$ เป็นเว็กเตอร์คงที่ได้

$$\overline{H}(\bar{r}) = -i\omega\,\overline{\overline{\alpha}}^{-1}.\{[\nabla\times\overline{\overline{G}}_f(\bar{r}) +$$

$$i\,k_o\overline{m}\times\overline{\overline{G}}_f(\bar{r})].\ \overline{p}_o\} \qquad .....(66)$$

เมื่อคำนวณต่อไป สนามแม่เหล็กช่วงไกลนั้น เราได้เป็น

$$\overline{H}(\bar{r}) = \frac{\omega^2\mu_O\mu G_m(r,\omega)}{\eta r_V}\{\frac{1}{\alpha}(\bar{r}\times\overline{p}_o) + (1-\frac{1}{\alpha})$$

$$(\bar{r}.\frac{\wedge}{V})(\bar{V}\times\bar{p}_o)+(\frac{\wedge}{V}.\bar{r}\times\bar{p}_o)\frac{\wedge}{V}+(\bar{p}_o.\frac{\wedge}{V})(\bar{r}\times\frac{\wedge}{V})]\} \qquad .....(67)$$

โดยที่ $\eta = \sqrt{\mu_o\mu/\varepsilon_o\varepsilon}$

ในกรณีที่ $\bar{p}_o$ ขนานกับ $\bar{v}$ และดังนั้น $\bar{p}_o = \bar{p}_o\frac{\wedge}{V}$ เราจะได้

$$\overline{E}(\bar{r}) = \frac{\omega^2\mu_o\mu p_o G_m(\bar{r},\omega)}{r_v^2}\bar{r}\times(\bar{r}\times\frac{\wedge}{V}) \qquad .....(68)$$

$$\overline{H}(\bar{r}) = \frac{\omega^2\mu_o\mu_o p_o G_m(\bar{r},\omega)}{r_v^2}(\bar{r}\times\frac{\wedge}{V}) \qquad .....(69)$$

แต่ถ้า $\overline{p}_o$ ตั้งฉากกับ $\overline{v}$ และดังนั้น $\overline{p}_o.\overline{v} = 0$ เราได้

$$\overline{E}(\bar{r}) = \frac{\omega^2 \mu_o \mu G_m(\overline{r},\omega)}{(\overline{r} \times \frac{\wedge}{V})^2} \overline{r} \cdot \frac{\wedge}{V} \times \overline{p}_o (\overline{r} \times \frac{\wedge}{V})$$

$$+ \frac{(\overline{r} \cdot \frac{\wedge}{V})(\overline{p}_o \cdot \overline{r})}{r_V^2} [\overline{r} \times (\overline{r} \times \frac{\wedge}{V})]\} \quad .....(70)$$

และ

$$\overline{H}(\bar{r}) = \frac{\omega^2 \mu_o \mu G_m(\overline{r},\omega)}{\eta r_v} \{ \frac{1}{\alpha} (\overline{r} \times \overline{p}_o)$$

$$+ (1 - \frac{1}{\alpha})[(\overline{r} \cdot \frac{\wedge}{V})(\overline{v} \times \overline{p}_o) + (\overline{r} \cdot \overline{p}_o \times \frac{\wedge}{V}) \frac{\wedge}{V}]\} \quad .....(71)$$

8. บทสรุป

ผู้เขียนได้เริ่มต้นจากหลักสัมพัทธภาพเฉพาะ และทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าของแม็กซ์เวลล์ สำหรับตัวกลางที่กำลังเคลื่อนที่นั้นมีสมการที่ควบคุมคือ สมการแม่เหล็กไฟฟ้าของแม็กซ์เวลล์ - มินโคสกี้ ได้มีการแก้สมการสำหรับหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสำหรับต้นตอคือ ไดโพลไฟฟ้าระริกระรัวชั้นต่อไปที่ควรจะหาคือ สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก สำหรับสายอากาศที่ใช้จริงในทางปฏิบัติ นี่เป็นสิ่งที่วิศวกรไฟฟ้าสื่อสารควรหาออกมา

เอกสารอ้างอิง

1. อุทัย แก้วภราดัย, **"ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้ากับสัมพัทธภาพเฉพาะ"**, เทคโนโลยีประยุกต์ ปีที่ 8 ฉบับที่ 1 มกราคม - กุมภาพันธ์ 2530 หน้า 59 - 65
2. Hollis C. Chen, **"Theory of Electromagnetic Waves"**, McGraw - Hill Book Company, 1985
3. C.A.Conlson and T.J.M.Boyd, "Electricity,' Longman Group Limited, 1979