

เส้นโค้งการเปลี่ยนของพฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง เป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มี ปลายอิสระทุกด้านกรณีศึกษาการแปรผันค่า คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ*

ชิตพล คงศิลา¹⁾ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต²⁾

¹⁾ นักศึกษาระดับปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น 40002

²⁾ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น 40002

Email : chittapol_pol@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้เกี่ยวข้องกับเรื่องเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้านและมีหน้าตัดสม่ำเสมอ โดยแบบจำลองที่สร้างขึ้นมีความหนา 5 มิลลิเมตร, ความยาวคงที่ 500 มิลลิเมตร และมีความกว้างแปรตามอัตราส่วนเรขาคณิตตั้งแต่ 0.25 ถึง 20 โดยจะศึกษากรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุทั้งสามกรณี คือ แปรผันค่าความหนาแน่น ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น และค่าอัตราส่วนพัวซอง ได้ใช้การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS มาช่วยวิเคราะห์เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ 40 ค่าแรกของความถี่ธรรมชาติ หลังจากนั้นสังเกตพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของรูปร่างโหมดในแต่ละอัตราส่วนเรขาคณิตเพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุและการแปรผันอัตราส่วนเรขาคณิต ซึ่งความสัมพันธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น 2 ตัวแปร โดยสมการเหล่านี้สามารถแบ่งพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานและคล้ายแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้านได้

คำสำคัญ : พฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง, พฤติกรรมคล้ายคาน, คานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน, ความถี่ธรรมชาติ, รูปร่างโหมด, คุณสมบัติเชิงกล

* รับผิดชอบเมื่อวันที่ 11 เมษายน 2550 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 30 พฤษภาคม 2550

Transition curve from Plate-Like to Beam-Like Behavior of Free-Free Beams and Plates for Case Study Changed Material Properties*

Chittapol Kongsila¹⁾ and Kiatfa Tangchaichit²⁾

¹⁾ Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

²⁾ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

Email: chittapol_pol@hotmail.com

ABSTRACT

This paper deals about Transition curve from Plate-Like to Beam-Like Behavior of Free-Free Beams and Plates. The uniform cross section area of free-free beams and plates were used in this work. The model were produced with thickness 5 mm. The length was fixed 500 mm. and the breadth was varied with the aspect ratios from 0.25 up to 20. Three material properties variation as follow Density, Young's modulus and Poisson's ratio were set up. The finite element program (ANSYS) was used to analyze the free vibration of free-free beams and plates to set the natural frequencies and mode shapes. It was used to calculate the first 40 natural frequencies and mode shapes. The transition behavior of the mode shapes in each geometric ratios were subsequently observed. Then the relationship of the mechanical properties and geometric ratios variation were discussed. These relationships were presented in the two variables nonlinear equations.

Keywords : Plate-Like Behavior, Beam-Like Behavior, Free-Free Beams and Plates, Natural Frequency, Free Vibration, Mode Shape, Mechanical Property

* Original manuscript submitted: April 11, 2007 and Final manuscript received: May 30, 2007

บทนำ

การสั่นสะเทือนอย่างอิสระโดยทั่วไปแล้วจะมีอยู่ทั้งหมด 3 ประเภทคือการสั่นสะเทือนตามขวาง (Transverse Vibration), การสั่นสะเทือนตามแนวยาว (Longitudinal Vibration) และการสั่นสะเทือนโดยการบิด (Torsional Vibration) แต่ในการศึกษาในขั้นนี้จะพิจารณาเฉพาะการสั่นสะเทือนตามขวาง (Transverse vibration) อย่างเดียวเท่านั้น โดยจะพิจารณาการสั่นสะเทือนที่เป็นการสั่นสะเทือนแบบไม่มีความหน่วง (Undamped Vibration) หมายถึงการสั่นที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานให้กับสิ่งแวดล้อมของระบบ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปแรงเสียดทานหรือแรงต้านอื่นใด ซึ่งเมื่อระบบเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงจะทำให้พลังงานรวมของระบบในระหว่างการเคลื่อนที่นี้มีค่าคงที่ สำหรับระบบที่เกิดการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและเป็นการสั่นแบบอิสระความถี่ของการสั่นของระบบจะเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ซึ่งความถี่ธรรมชาตินี้ถือว่าเป็นปริมาณที่มีความสำคัญมากในการออกแบบ ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด (Mode Shape) ของการสั่นสะเทือนนั้นสามารถหาได้ด้วยวิธีต่างๆ เช่น การคำนวณโดยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite Element Method), Rayleigh-Ritz Method เป็นต้น การทดลองการสั่นสะเทือนของคานที่มีปลายอิสระทุกด้านจะไม่ค่อยเป็นที่แพร่หลายนัก โดยงานวิจัยส่วนใหญ่จะนิยมทดลองการสั่นสะเทือนของคานยื่น (เกียรติฟ้า, 2548), (นิติงศ์, 2549) เหตุผลที่ไม่ค่อยมีผู้ทดลองการสั่นสะเทือนของคานที่มีปลายอิสระทุกด้านเป็นเพราะว่า คานที่มีปลายอิสระทุกด้านจะมีการทดลองที่ยุ่งยากมากและใช้ทุนในการทดลองค่อนข้างสูง ซึ่งจะแตกต่างจากการทดลองการสั่นสะเทือนของคานยื่นโดยมีการทดลองที่ไม่ยุ่งยากนักและใช้ทุนในการทดลองค่อนข้างต่ำ ถึงแม้การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของคานที่มีปลายอิสระทุกด้านจะมีความยุ่งยากมาก แต่ก็มีผู้ที่สนใจศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของคานที่มีปลายอิสระทุกด้าน โดยใช้ทฤษฎีการสั่นสะเทือนของ Euler-Bernoulli Beam (M. Boltezar, B. Strancar and A. Kuhelj, 1998), (G. C. Nihous, 1997), (X. Q. Liu and R. C. Ertekin and H. R. Riggs, 1996), (C. L. Kirk and S. M. Wiedemann, 2002), (S.P.Timoshenko,1990) ซึ่งสมการ Euler-Bernoulli Beam เป็นสมการครอบคลุมสมการการเคลื่อนที่สำหรับการสั่นสะเทือนตามขวาง เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด จากการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติที่ 4 โหมดแรก (X. Q. Liu and R. C. Ertekin and H. R. Riggs, 1996) ซึ่งจะพบว่าแต่ละโหมดของ Mode Shape จะมีการโก่งตัวของคานสูงสุดเป็น 1 ทุกโหมด ซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการประยุกต์ใช้แรงดึงในแนวแกนที่น้อยมากจะเหมาะสมที่สุดในการหาค่าความถี่ธรรมชาติ (Nihous, 1997) การสั่นสะเทือนของคานอิสระทุกด้านที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอและมีรอยร้าวตลอดตามขวางของคาน (Boltezar, 1998) พบว่าการเปลี่ยนแปลงของค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดจากการสั่นสะเทือนตามขวางของคานมีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของรอยร้าวมากกว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดจากการสั่นสะเทือนตามแนวยาวของคาน สำหรับคานอิสระที่มีมวลติดอยู่ที่ปลายของคานทั้งสองด้าน (Kirk, 2002) จากการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติจากการสั่นสะเทือนของคานที่ได้ติดมวลไว้ที่ปลายของคานในตำแหน่งต่างๆกัน ซึ่งลักษณะการติดตั้งของมวล, ตำแหน่งของมวลที่ปลายทั้งสองข้างของคานอิสระ มีผลทำให้รูปร่างโหมดที่ได้มาแตกต่างกัน โดยการเปลี่ยนแปลงของเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างของคานไม่มีผลต่อ

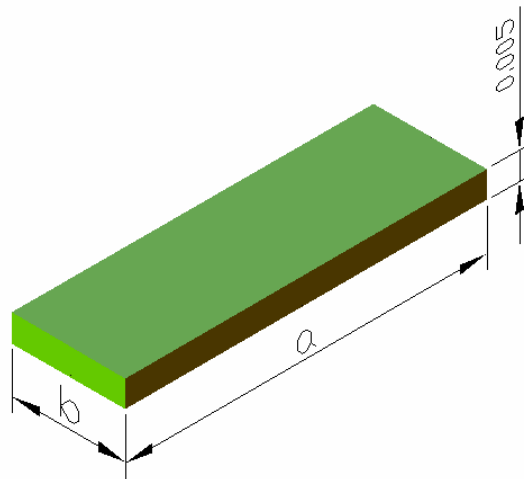
ค่าความถี่ธรรมชาติแต่รูปร่างโหมดจะต่างกัน ในการศึกษาหาค่าความถี่ธรรมชาติจากคานยื่น (เกียรติฟ้า, 2548) โดยทดลองกับคานยื่นที่ทำมาจากอลูมิเนียมซึ่งมีขนาดอัตราส่วนเรขาคณิตต่าง ๆ กันคือ 3, 5, 7, 9, 15 และ 20 โดยที่คานมีความยาว 50 ซม. และมีความหนา 5 มม. เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มาจากการทดลองกับค่าความถี่ธรรมชาติจากทฤษฎีของ Rayleigh-Ritz, ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรม MatLab และค่าความถี่ธรรมชาติจากไฟไนท์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS ซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดต้น ๆ จะมีค่าที่ใกล้เคียงกันมากทั้งสี่กรณี แต่เมื่อพิจารณาที่โหมดสูง ๆ ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลองเมื่อเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยไฟไนท์เอลิเมนต์จะมีค่าความคลาดเคลื่อนค่อนข้างสูง ในการศึกษาการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของคานที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นคานยื่น (นิตินงค์, 2549) เงื่อนไขขอบเขตของคานที่มีปลายอิสระทุกด้าน (ชิตพล, 2550) และเงื่อนไขขอบเขตของคานที่ยึดติดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน (จิรวัดณ์, 2550) ซึ่งทำมาจากเหล็กกล้า (Carbon Steel) โดยมีความหนาของคาน 5 มม. มีความยาวของคาน 50 ซม. มีอัตราส่วนเรขาคณิตตั้งแต่ 0.25 ถึง 20 ได้วิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS ได้ความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนเรขาคณิตเป็นเส้นโค้งพาราโบลาของการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมคล้ายคาน โดยพื้นที่ด้านบนของเส้นโค้งพาราโบลาเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง ส่วนพื้นที่ด้านล่างของเส้นโค้งพาราโบลาเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน จากเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันเมื่อพิจารณาที่รอบของการสั่นสะเทือนรอบเดียวกันจะได้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ใกล้เคียงกันมากเพียงแต่ลำดับโหมดจะแตกต่างกันเท่านั้น (C. L. Kirk and S. M. Wiedemann, 2002) ในปัจจุบันนี้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด โดยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ เป็นวิธีที่นิยมโดยทำการวิเคราะห์คำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติลำดับสูง ๆ และรูปร่างโหมด ซึ่งมีความซับซ้อนและยากที่จะทำการวิเคราะห์ ให้ผลคำตอบได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำ ด้วยเหตุนี้จึงได้ใช้การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีของไฟไนท์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS มาช่วยวิเคราะห์เพื่อหาความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เพื่อช่วยแยกแยะพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระให้เห็นลักษณะทางกายภาพได้อย่างชัดเจน (N. S. Bardell, J. M. Dunsdon & R. S. Langley, 1995)

การทดลอง

ได้ใช้โปรแกรม ANSYS ในการสร้างแบบจำลองโดยแบบจำลองที่สร้างขึ้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 1 มีความหนาของคาน 5 มม. มีความยาวของคาน 500 มม. และความกว้างแปรตามอัตราส่วนเรขาคณิตตั้งแต่ 0.25 ถึง 20 สำหรับการทดลองจะใช้วัสดุที่เป็นโลหะรวมทั้งสิ้น 7 ประเภท ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1 ซึ่งจะแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุทั้งสามกรณีดังแสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยอ้างอิงกับค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุสำหรับเหล็กกล้า (Carbon steel) แบบจำลองที่สร้างขึ้นได้เลือกใช้ประเภทการวิเคราะห์แบบ Modal, กำหนดคุณสมบัติของวัสดุให้เป็นโครงสร้างแบบ Linear Elastic และ Isotropic, เลือกใช้เอลิเมนต์แบบ SHELL 93, และกำหนด Mesh เป็นแบบสี่เหลี่ยม (Quadrilateral Mesh) (ชิตพล, 2550) การพิจารณาหาจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในด้านความยาว (a) และความกว้าง (b) ทำการแบ่งเอลิ-

เส้นโค้งการเปลี่ยนของพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน และแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้านกรณีศึกษาการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

เม้นต์ในด้านความยาวให้มีจำนวนเอลิเมนต์เป็น (N_a) 40, 50, 60, 80, 100, 120, 150 ตามลำดับและให้มีจำนวนเอลิเมนต์ด้านความกว้างเป็น (N_b) ซึ่งจำนวนเอลิเมนต์ด้านความกว้าง (N_b) แปรตามค่าอัตราส่วนเรขาคณิต $r = a/b = N_a / N_b$ เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่จำนวนเอลิเมนต์ด้านความยาวของคานต่างๆ โดยสามารถเลือกเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในด้านความยาวของคาน (N_a) เท่ากับ 100 เอลิเมนต์ (นิติงศ์, 2549)



รูปที่ 1 แบบจำลองของคานอิสระทั้งสี่ด้าน

Material	Density (kg/m ³)	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio
Aluminum	2700	70	0.33
Aluminum alloy 2014	2800	73	0.34
Titanium A-70	4540	107	0.34
Zinc	7130	96.5	0.35
Cast iron steel	7150	179	0.22
Carbon steel	7850	210	0.29
Stainless steel	8030	193	0.27

ตารางที่ 1 แสดงค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ใช้ในการทดสอบ (มณฑล, 2532)

กรณีการแปรผันค่า คุณสมบัติของวัสดุ	ค่าคุณสมบัติวัสดุทางกล		
	Density (kg/m ³)	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio
กรณีการแปรผันค่า Density	2700	210	0.29
	2800	210	0.29
	4540	210	0.29
	7130	210	0.29
	7150	210	0.29
	7850	210	0.29
	8030	210	0.29
กรณีการแปรผันค่า Young's modulus	7850	70	0.29
	7850	73	0.29
	7850	96.5	0.29
	7850	107	0.29
	7850	179	0.29
	7850	193	0.29
กรณีการแปรผันค่า Poisson's ratio	7850	210	0.22
	7850	210	0.27
	7850	210	0.29
	7850	210	0.33

ตารางที่ 2 แสดงการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ใช้ในการทดสอบ

ตารางที่ 2 แสดงถึงการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ใช้ในการทดสอบ ซึ่งการแปรผันคุณสมบัติเชิงกลทั้งสามกรณีจะอ้างอิงกับคุณสมบัติเชิงกลของเหล็กกล้า (Carbon steel) ซึ่งเป็นโลหะที่มีอยู่จริงในโลก สำหรับการทดลองแปรผันคุณสมบัติเชิงกลทั้งสามกรณีดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 คุณสมบัติเชิงกลดังกล่าวจะไม่ใช้คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีอยู่จริงในโลก ยกเว้นกรณีการทดลองที่มีความหนาแน่น 7850 kg/m³ ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น 210 GPa และค่าอัตราส่วนพัวซอง 0.29 ซึ่งเป็นคุณสมบัติของเหล็กกล้า (Carbon steel) ในการทดลองแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลทั้งสามกรณีนี้ เพื่อศึกษาอิทธิพลของการแปรผันคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุทั้งสามกรณีที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติจากการสั่นสะเทือนอย่างอิสระเท่านั้น

ผลการทดลอง

ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนเรขาคณิตของแผ่นบางที่โหมดต่างๆ ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานในกรณีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุได้แสดงไว้ในตารางที่ 3 ถึงตารางที่ 5 ซึ่งตารางที่ 3 ถึงตารางที่ 5 แสดงถึงความสัมพันธ์ของค่าของความถี่ธรรมชาติ (f) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ของแผ่นบางที่โหมดต่างๆ ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าความหนาแน่น ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น และค่าอัตราส่วนพัวซองตามลำดับ Mode ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมคล้ายคาน Mode แรกคือ

Mode 2 ซึ่งจะอยู่ที่อัตราส่วนเรขาคณิต 2.5 โดยที่ Mode 0 และ Mode 1 จะไม่นำมาพิจารณาเนื่องจากคานอิสระทั้งสองด้านจะไม่มี Mode 0 ส่วน Mode 1 เนื่องจากความถี่ธรรมชาติที่ได้มามีค่าเข้าใกล้ศูนย์จึงตัดทิ้งไป ดังนั้นจึงเลือกใช้อัตราส่วนเรขาคณิตที่ 2.5 เป็นอัตราส่วนแรก สำหรับอัตราส่วนเรขาคณิต 10 จะพิจารณาเป็นอัตราส่วนสุดท้ายเนื่องจากมีความจำเป็นที่จะต้องกำหนดจุดสิ้นสุดของชุดข้อมูลที่ไม่ให้มากเกินไปโดยที่ Mode 10 เริ่มมีการเปลี่ยนพฤติกรรมการสั่นสะเทือนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่อัตราส่วนเรขาคณิต 10

อัตราส่วนเรขาคณิต (r)	Mode	ค่าความถี่ธรรมชาติ (f)						
		การแปรผันค่าความหนาแน่น (kg/m^3)						
		2700	2800	4540	7130	7150	7850	8030
2.5	2	182.13	178.85	140.46	112.08	111.92	106.82	105.61
3	3	504.94	495.84	389.4	310.72	310.29	296.13	292.79
4	4	991.23	973.37	764.41	609.97	609.12	581.33	574.78
5	5	1639	1609.4	1263.9	1008.6	1007.2	961.21	950.37
6	6	2447.1	2403	1887.1	1505.9	1503.8	1435.2	1419
7	7	3414.3	3352.8	2633	2101.1	2098.1	2002.4	1979.8
8	8	4539.1	4457.3	3500.4	2793.2	2789.3	2662	2632
9	9	5819.4	5714.6	4487.8	3581.1	3576.1	3412.9	3374.5
10	10	7253.7	7123	5593.9	4463.7	4457.5	4254.1	4206.1

ตารางที่ 3 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติ (f) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ของแผ่นบางที่โหมดต่างๆ ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าความหนาแน่น

อัตราส่วนเรขาคณิต (r)	Mode	ค่าความถี่ธรรมชาติ (f)						
		การแปรผันค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (GPa)						
		70	73	96.5	107	179	193	210
2.5	2	61.67	62.978	72.409	76.246	98.617	102.4	106.82
3	3	170.97	174.6	200.74	211.38	273.4	283.89	296.13
4	4	335.63	342.75	394.07	414.96	536.71	557.3	581.33
5	5	554.95	566.72	651.59	686.12	887.43	921.48	961.21
6	6	828.59	846.16	972.87	1024.4	1325	1375.8	1435.2
7	7	1156.1	1180.6	1357.4	1429.3	1848.7	1919.6	2002.4
8	8	1536.9	1569.5	1804.5	1900.2	2457.7	2552	2662
9	9	1970.5	2012.2	2313.6	2436.2	3151	3271.9	3412.9
10	10	2456.1	2508.2	2883.8	3036.6	3927.6	4078.3	4254.1

ตารางที่ 4 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติ (f) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ของแผ่นบางที่โหมดต่างๆ ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น

อัตราส่วน เรขาคณิต (r)	Mode	ค่าความถี่ธรรมชาติ (f)			
		การแปรผันค่าอัตราส่วนพัวซอง			
		0.22	0.27	0.29	0.33
2.5	2	106.61	106.75	106.82	106.95
3	3	294.84	295.73	296.13	297
4	4	578.33	580.4	581.33	583.36
5	5	955.82	959.54	961.21	964.86
6	6	1426.8	1432.6	1435.2	1440.8
7	7	1990.6	1998.7	2002.4	2010.5
8	8	2646.3	2657.1	2662	2672.8
9	9	3393	3406.7	3412.9	3426.6
10	10	4229.8	4246.5	4254.1	4270.8

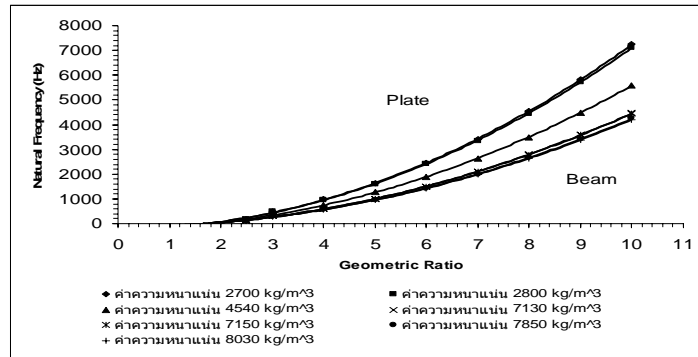
ตารางที่ 5 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติ (f) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ของแผ่นบางที่โหมดต่างๆในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตราส่วนพัวซอง

นำความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนเรขาคณิตของแผ่นบางที่โหมดต่างๆ ในแต่ละกรณีของการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ มาหาสมการเส้นโค้ง Polynomial 2nd order โดยการประมาณค่าแบบ Curve fitting ด้วยระเบียบวิธีของ Least-Square Method จะได้ความสัมพันธ์ของสมการดังแสดงในตารางที่ 6

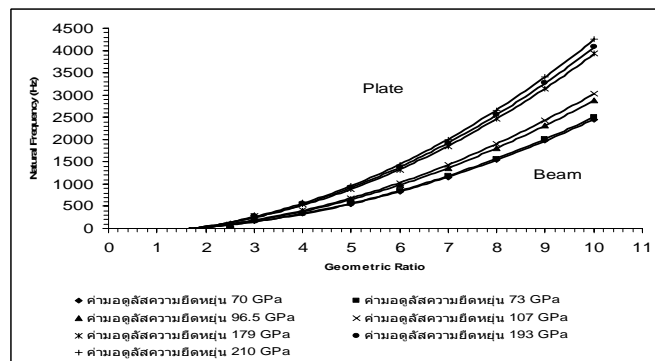
กรณีการแปรผันค่า คุณสมบัติเชิงกล ของวัสดุ	สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนเรขาคณิต (r)	
กรณีการแปรผันค่า Density (kg/m^3) Young's modulus = 210 GPa Poisson's ratio = 0.29	2700	$f = 79.794r^2 - 67.332r - 36.008$
	2800	$f = 78.358r^2 - 66.127r - 35.355$
	4540	$f = 61.537r^2 - 51.944r - 27.748$
	7130	$f = 49.102r^2 - 41.427r - 22.167$
	7150	$f = 49.035r^2 - 41.378r - 22.124$
	7850	$f = 46.797r^2 - 39.487r - 21.116$
	8030	$f = 46.27r^2 - 39.043r - 20.88$
กรณีการแปรผันค่า Young's modulus (GPa) Density = 7850 kg/m^3 Poisson's ratio = 0.29	70	$f = 27.019r^2 - 22.801r - 12.191$
	73	$f = 27.591r^2 - 23.285r - 12.446$
	96.5	$f = 31.724r^2 - 26.775r - 14.308$
	107	$f = 33.405r^2 - 28.193r - 15.068$
	179	$f = 43.206r^2 - 36.466r - 19.489$
	193	$f = 44.865r^2 - 37.873r - 20.229$
	210	$f = 46.797r^2 - 39.487r - 21.116$
กรณีการแปรผันค่า Poisson's ratio Density = 7850 kg/m^3 Young's modulus = 210 GPa	0.22	$f = 46.525r^2 - 39.283r - 20.731$
	0.27	$f = 46.712r^2 - 39.419r - 21$
	0.29	$f = 46.797r^2 - 39.487r - 21.116$
	0.33	$f = 46.987r^2 - 39.657r - 21.364$

ตารางที่ 6 สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนเรขาคณิต (r)

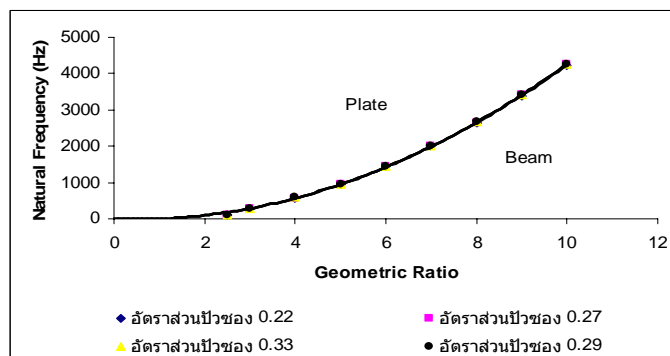
เปรียบเทียบข้อมูลของค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มาทั้งสามกรณีของการเปลี่ยนแปลงและการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ นำมาสร้างกราฟเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟที่ได้รวมการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของโลหะที่ค่าต่างๆไว้ด้วยกัน ซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติขึ้นอยู่กับอัตราส่วนเรขาคณิต ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2 ถึงรูปที่ 4



รูปที่ 2 กราฟแสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั่นสะท้อนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะท้อนคล้ายคานกรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าความหนาแน่น



รูปที่ 3 กราฟแสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั่นสะท้อนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะท้อนคล้ายคานกรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น



รูปที่ 4 กราฟแสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั่นสะท้อนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะท้อนคล้ายคานกรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตราส่วนพัวซอง

จากรูปที่ 2 ถึงรูปที่ 4 แสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั้นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั้นสะเทือนคล้ายคาน โดยใช้ความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของคานที่เริ่มมีพฤติกรรมของการสั้นแบบแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมของการสั้นแบบคาน กรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าความหนาแน่น ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น และค่าอัตราส่วนพัวของตามลำดับ ซึ่งทั้งสามกราฟสามารถบอกได้ว่า เมื่ออัตราส่วนเรขาคณิตเพิ่มขึ้นจะทำให้พื้นที่หน้าตัดของคานลดลงส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าที่เพิ่มขึ้น และเมื่อพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ จะพบว่าเมื่อค่าความหนาแน่นลดลงจะส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้น ในขณะที่ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นลดลงมีผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลงด้วย และเมื่อค่าอัตราส่วนพัวของเปลี่ยนแปลงจะพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มาจากการเปลี่ยนแปลงที่น้อยมาก สำหรับรูปที่ 2 โดยพิจารณาที่ค่าความหนาแน่นที่ 2700 kg/m^3 จะมีค่าความถี่ธรรมชาติที่สูงมาก เพราะว่าคุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติของอะลูมิเนียม (Aluminum) ซึ่งเป็นโลหะที่ไม่ใช่เหล็ก เมื่อพิจารณาการแปรผันเฉพาะค่าความหนาแน่นที่ค่าอัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ ถ้าค่าความหนาแน่นมีค่าที่ลดลงจะทำให้ค่ามวลต่อหน่วยความยาวของคาน (ρA) มีค่าที่ลดลง จะส่งผลให้ได้ค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้นดังแสดงในรูปที่ 2 และสำหรับรูปที่ 3 พิจารณาที่ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นที่ 70 GPa จะมีค่าความถี่ธรรมชาติที่ลดลงต่ำมาก ซึ่งคุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติของอะลูมิเนียม (Aluminum) ซึ่งเป็นโลหะที่ไม่ใช่เหล็กเช่นกัน เมื่อพิจารณากรณีของการแปรผันเฉพาะค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นที่ค่าอัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ ถ้าค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นมีค่าที่ลดลงจะทำให้ค่าความแกร่งของการโก่งตัว (Flexural Rigidity; EI) มีค่าที่ลดลงด้วย จะส่งผลให้ได้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลงดังแสดงในรูปที่ 3 สำหรับรูปที่ 4 เป็นกราฟแสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั้นสะเทือนอย่างอิสระคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั้นสะเทือนอย่างอิสระคล้ายคานกรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตราส่วนพัวของ เมื่อพิจารณาที่อัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ จะพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นจากการแปรผันค่าอัตราส่วนพัวของทั้งสี่ค่ามีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นที่ค่าอัตราส่วนพัวของมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มาจากการเปลี่ยนแปลงที่น้อยมาก สำหรับพื้นที่ด้านบนของสมการโพลีโนเมียลอันดับ 2 ทั้งสามกรณีจะบอกถึงการสั้นสะเทือนของวัสดุที่มีพฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง ส่วนพื้นที่ด้านล่างทั้งสามกรณีจะบอกถึงการสั้นสะเทือนของวัสดุที่มีพฤติกรรมคล้ายคาน

หลังจากนั้นทำการศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนเรขาคณิต และการแปรผันค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ค่าต่างๆ โดยจะทำการแปรผัน 3 กรณี คือ กรณีการแปรผันเฉพาะค่าความหนาแน่น กรณีการแปรผันค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น และกรณีการแปรผันค่าอัตราส่วนพัวของ เพื่อที่จะหาสมการค่าความถี่ธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่ค่าต่างๆ โดยอาศัยวิธี Response Surface Method (โดยใช้โปรแกรม MATLAB), และ การประมาณค่าแบบ Curve Fitting ด้วยระเบียบวิธี Multivariate Ratio Fit Method (โดยใช้โปรแกรม NCSS) ทำการวิเคราะห์เพื่อหาสมการของความถี่ธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุทั้งสามกรณี ได้แสดงไว้ในตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับค่าความหนาแน่น (ρ) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r)
Response Surface Method (โปรแกรม MATLAB)	$f = 55.2696r^2 - 0.072r\rho + 409.203r - 0.1688\rho - 505.915$
Multivariate Ratio Fit (โปรแกรม NCSS)	$f = \frac{-148.4025 + 74.63557r^2 - 0.000001126053\rho^2}{1 - 0.0006247788r^2 + 0.00000001289759\rho^2}$

ตารางที่ 7 สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับค่าความหนาแน่น (ρ) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) จากระเบียบวิธีทั้งสอง

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น (E) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r)
Response Surface Method (โปรแกรม MATLAB)	$f = 34.248r^2 - 0.011E^2 + 1.624rE - 218.1098r - 1.644E + 339.69$
Multivariate Ratio Fit (โปรแกรม NCSS)	$f = \frac{-74.91049 + 25.58262r^2 + 0.0004261041E^2}{1 - 0.0002464204r^2 - 0.000009393204E^2}$

ตารางที่ 8 สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น (E) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) จากระเบียบวิธีทั้งสอง

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนพัวซอง (ν) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r)
Response Surface Method (โปรแกรม MATLAB)	$f = 44.03r^2 + 257.53\nu^2 + 48.75r\nu - 17.14r - 283.71\nu - 65.01$
Multivariate Ratio Fit (โปรแกรม NCSS)	$f = \frac{-123.0618 + 42.69124r^2 - 7.184693\nu^2}{1 - 0.000116347r^2 - 0.1604157\nu^2}$

ตารางที่ 9 สมการค่าความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนพัวซอง (ν) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) จากระเบียบวิธีทั้งสอง

จากตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9 แสดงถึงสมการค่าความถี่ธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่ค่าต่างๆ โดยอาศัยวิธี Response Surface Method (โปรแกรม MATLAB), และ การประมาณค่าแบบ Curve Fitting ด้วยระเบียบวิธี Multivariate Ratio Fit Method

(โปรแกรม NCSS) โดยสมการในตารางที่ 6 ถึงตารางที่ 9 สมการเหล่านี้จะใช้อัตราส่วนเรขาคณิตตั้งแต่ 2.5 ถึง 10 แต่สำหรับตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9 เป็นสมการ 2 ตัวแปรซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติขึ้นอยู่กับ การแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุและอัตราส่วนเรขาคณิต โดยในกรณีการแปรผันค่าความหนาแน่นจะ ใช้ค่าความหนาแน่นเป็นดังนี้คือ 2700, 2800, 4540, 7130, 7150, 7850, 8030 kg/m³ ในกรณีการแปรผัน ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นจะใช้ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นดังนี้คือ 70, 73, 96.5, 107, 179, 193, 210 GPa และสำหรับกรณีของการแปรผันค่าอัตราส่วนพัวซองจะใช้ค่าอัตราส่วนพัวซองดังนี้คือ 0.22, 0.27, 0.29, 0.33

สรุปผลการทดลอง

ในการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน ได้ใช้การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์ จากโปรแกรม ANSYS มาช่วยวิเคราะห์เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ 40 ค่าแรกของความถี่ธรรมชาติ หลังจากนั้นสังเกตพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของรูปร่างโหมดในแต่ละอัตราส่วนเรขาคณิตเพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนเรขาคณิต ซึ่งความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนเรขาคณิตที่ได้มาจะอยู่ในรูปของเส้นโค้งพาราโบลา ซึ่งเส้นโค้งนี้สามารถแบ่งพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้านได้ จากความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนเรขาคณิตที่ Mode ต่างๆในตารางที่ 3 ถึงตารางที่ 5 โดยความสัมพันธ์ที่กล่าวมาข้างต้นจะได้สมการโพลีโนเมียลอันดับสอง ดังแสดงไว้ในตารางที่ 6 ซึ่งเป็นสมการ 1 ตัวแปร โดยการประมาณค่าแบบ Curve Fitting ด้วยระเบียบวิธีของ Least-Square Method หลังจากทำการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุทั้งสามกรณีดังแสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยกรณีแรกแปรผันค่าความหนาแน่น กรณีที่สองแปรผันค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นและกรณีที่สามแปรผันค่าอัตราส่วนพัวซอง ซึ่งการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลทั้งสามกรณีนี้จะขึ้นอยู่กับ การแปรผันค่าอัตราส่วนเรขาคณิตด้วยคือตั้งแต่ 2.5 ถึง 10 จากความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับ การแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุและการแปรผันอัตราส่วนเรขาคณิตจะได้ความสัมพันธ์ออกมาในรูปของสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equations) โดยได้แสดงไว้ในตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9 เป็นสมการ 2 ตัวแปรโดยหาได้จาก การประมาณค่าแบบ Curve Fitting ด้วยระเบียบวิธี Multivariate Ratio Fit Method (โดยใช้โปรแกรม NCSS) ซึ่งสมการในตารางที่ 6 จะใช้ค่าอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ที่ 2.5 ถึง 10 เท่านั้นเพราะว่า Mode ที่เริ่มมีการเปลี่ยนพฤติกรรมการสั่นสะเทือนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมคล้ายคาน Mode แรกคือ Mode 2 ซึ่งจะอยู่ที่อัตราส่วนเรขาคณิต 2.5 สำหรับสมการในตารางที่ 7 ถึง 9 เป็นสมการ 2 ตัวแปรจะใช้ค่าอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ที่ 2.5 ถึง 10 เช่นเดียวกันแต่เนื่องจากว่าเป็นสมการสองตัวแปรซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติขึ้นอยู่กับอัตราส่วนเรขาคณิตและค่าคุณสมบัติเชิงกลของโลหะ ดังนั้นค่าคุณสมบัติเชิงกลของโลหะสำหรับกรณีการแปรผันค่าความหนาแน่นจะใช้ค่าความหนาแน่นที่ 2700, 2800, 4540, 7130, 7150, 7850, 8030 kg/m³ ในกรณีการแปรผันค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นจะใช้ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นดังนี้คือ 70, 73, 96.5, 107, 179, 193, 210 GPa และสำหรับกรณีของการแปร

ผันค่าอัตราส่วนพัวของจะใช้ค่าอัตราส่วนพัวของดังนี้คือ 0.22, 0.27, 0.29, 0.33 จากรูปที่ 2 ถึงรูปที่ 4 เป็นกราฟแสดงเปรียบเทียบเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนอย่างอิสระคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนอย่างอิสระคล้ายคานกรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ เฉพาะค่าความหนาแน่น ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น และค่าอัตราส่วนพัวของตามลำดับ จากผลการทดลองที่ผ่านมาเมื่ออัตราส่วนเรขาคณิตเพิ่มขึ้นจะทำให้พื้นที่หน้าตัดของคานลดลงส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าที่เพิ่มขึ้น และเมื่อพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ จะพบว่าเมื่อค่าความหนาแน่นลดลงจะส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้น ในขณะที่ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นลดลงมีผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลงด้วย และเมื่อค่าอัตราส่วนพัวของมีการเปลี่ยนแปลงจะพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มา มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก พิจารณารูปที่ 2 เมื่อพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ ถ้าค่าความหนาแน่นมีค่าที่ลดลงจะทำให้ค่ามวลต่อหน่วยความยาวของคาน (ρA) มีค่าที่ลดลง จะส่งผลให้ได้ค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้น และสำหรับรูปที่ 3 เมื่อพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ ถ้าค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นมีค่าที่ลดลงจะทำให้ค่าความแกร่งของการโก่งตัว (Flexural Rigidity; EI) มีค่าที่ลดลงด้วย จะส่งผลให้ได้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลง สำหรับรูปที่ 4 เป็นกราฟแสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนอย่างอิสระคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนอย่างอิสระคล้ายคานกรณีที่แปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ เฉพาะค่าอัตราส่วนพัวของ เมื่อพิจารณาที่อัตราส่วนเรขาคณิตใดๆ จะพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นจากการแปรผันค่าอัตราส่วนพัวของทั้งสี่ค่ามีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นที่ค่าอัตราส่วนพัวของมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ น้อยมาก ดังนั้นเมื่อพิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติในกรณี 2 ตัวแปร ค่าความถี่ธรรมชาติจะขึ้นอยู่กับ การแปรผันค่าความหนาแน่น ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่น และอัตราส่วนเรขาคณิตเท่านั้น แต่จะไม่ขึ้นกับการแปรผันค่าอัตราส่วนพัวของ จากรูปที่ 2 ถึงรูปที่ 4 สามารถระบุพฤติกรรมของเส้นโค้งได้ว่า พื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นโค้งจะบ่งบอกถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง ส่วนพื้นที่ที่อยู่ต่ำกว่าเส้นโค้งจะบ่งบอกถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน และเช่นเดียวกันเมื่อพิจารณาสมการในตารางที่ 6 และหรือสมการในตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9 เมื่อแทนค่าอัตราส่วนเรขาคณิตและค่าคุณสมบัติเชิงกลของโลหะตั้งที่ได้กล่าวไว้แล้วตอนต้น สามารถระบุพฤติกรรมของเส้นโค้งได้ว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มาด้วยวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ ถ้าสูงกว่าค่าความถี่ธรรมชาติจากสมการในตารางที่ 6 และหรือสมการในตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9 จะบ่งบอกถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มาด้วยวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ ถ้าต่ำกว่าค่าความถี่ธรรมชาติจากสมการในตารางที่ 6 และหรือสมการในตารางที่ 7 ถึงตารางที่ 9 จะบ่งบอกถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน

เอกสารอ้างอิง

- เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2548. การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น. *วิศวกรรมสาร มข.* 32(6): 755-763.
- จิรวัดณ์ วรุณโรจน์, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน. *วิศวกรรมสาร มข.* 34(1): 105-117.
- ชิตพล คงศิลา, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน. *วิศวกรรมสาร มข.* 34(1): 119-132.
- นิติพงศ์ โพธิ์ทอง, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2549. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น. *วิศวกรรมสาร มข.* 33(2): 155-167.
- มณฑล ฉายอรุณ. 2532. *วัสดุอุตสาหกรรม*. ขอนแก่นการพิมพ์.
- C. L. Kirk and S. M. Wiedemann. 2002. Natural frequencies and mode shapes of a free-free beam with large and masses. *Journal of Sound and Vibration*. 254(5): 939-949.
- G. C. Nihous. 1997. On the continuity of the boundary value problem for vibrating free-free Straight beams under axial loads. *Journal of Sound and Vibration*. 200(1): 110-119.
- M. Boltezar, B. Strancar and A. Kuhelj. 1998. Identification of transverse crack location in flexural vibrations of free-free beams. *Journal of Sound and Vibration*. 211(5): 729-734.
- N. S. Bardell, J. M. Dunsdon & R. S. Langley. 1995. Free vibration analysis of thin rectangular laminated plate assemblies using the h-p version of the finite element method. *Composite Structures*. 32(1995): 237-246.
- Saeed Moaveni. 1999. *Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS*. Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall, Inc.
- Singiresu S.Rao. 1995. *Mechanical Vibration*. 3rd ed. Addison-Wesley Publishing Company.
- W.Weaver,JR., S.P.Timoshenko, D.H.Young. 1990. *Vibration Problems in Engineering*. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc.
- X. Q. Liu and R. C. Ertekin and H. R. Riggs. 1996. Vibration of a free-free beam under tensile axial loads. *Journal of Sound and Vibration*. 190(2): 273-285.