

การทำนายลักษณะอากาศที่ไหลผ่านภายในอาคารที่พักอาศัยโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จิตติน ตริพุทธรัตน์^{*1)} และ คັນสนีย์ ชุนทิพย์ทอง²⁾

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ทางพลศาสตร์ของไหล (Fluid Dynamic) ในสองมิติ เพื่อทำนายลักษณะการไหลในการออกแบบตำแหน่งติดตั้งของหน้าต่างและบานประตูภายในบ้านหรือตัวอาคารทั้งภายในและภายนอก เช่น การออกแบบที่พักอาศัย หากสามารถทำนายลักษณะการไหลผ่านหลังคาและพฤติกรรมของการไหลผ่านประตู หน้าต่าง จะทำให้สามารถกำหนดตำแหน่งที่ติดตั้งหน้าต่างหรือประตูในตำแหน่งที่เหมาะสมได้ ช่วยประหยัดเวลาในการออกแบบและลดการลองผิดลองถูกในการออกแบบขั้นต้น เหตุผลดังกล่าวนี้ทำให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน บทความนี้อธิบายการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับการออกแบบติดตั้งหน้าต่าง และบานประตูในที่พักอาศัยและอาคาร โดยคำนึงถึงการไหลผ่านภายในที่พักอาศัยและอาคาร การทำนายลักษณะของการถ่ายเทของอากาศภายในบ้านและตัวอาคารทำให้เกิดประโยชน์โดยใช้หลักการตามทฤษฎีของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้อย่างชัดเจน

คำสำคัญ : ไฟไนต์เอลิเมนต์, พลศาสตร์ของไหล, การไหลแบบไม่อัดตัว

^{*} 1 อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อีเมล: Jittri@kku.ac.th

² นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
อีเมล: San_add@hotmail.com

Finite Element Method for Predicting of Air Flow Passed Residential Buildings

Jittin Triputtarat ^{*1)} and Sansanee Khunthiptong ²⁾

Abstract

The finite element method for predicting air flow behaviors passed residential buildings is presented. The method is based on the computational fluid dynamics for analyzing incompressible flow phenomena in two dimensions. The air flow behaviors obtained from using the method help designers to locate the buildings doors and windows properly to improve ventilation. Such flow behaviors are obtained from solving the Navier-Stokes equations that govern the flow field. Detailed finite element computational procedure and their element matrices are explained. Examples are presented to highlight the capability of the finite element method for predicting air flow passed residential buildings.

Keywords: Finite Element, Fluid dynamics, Incompressible flow

^{*1)} Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University, Khon Kaen 40002, E-mail: Jittri.kku.ac.th

²⁾ Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University, Khon Kaen 40002, E-mail: San_add@hotmail.com

บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการคำนวณที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานของคณิตศาสตร์และการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods) ความสามารถของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นอยู่กับวิธีการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการคำนวณและแสดงผลลัพธ์ออกมาในเชิงรูปภาพ(graphic) นอกจากนั้นยังสามารถพัฒนาขีดความสามารถที่ใช้กับรูปร่างของปัญหาที่ต้องการทำการวิเคราะห์ที่มีความซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณสามารถนำมาพัฒนา เพื่อใช้ในการออกแบบก่อให้เกิดประโยชน์ในขั้นต่อไป

ในปัจจุบันระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้นำมาประยุกต์กับงานทางด้านอื่นๆ เช่นงานทางด้านโครงสร้างงานที่ผลของอุณหภูมิมีส่วนเกี่ยวข้องหรืองานที่เกี่ยวข้องกับการไหลเป็นต้น โดยมีวัตถุประสงค์หลักคือ เพื่อลดค่าใช้จ่ายที่ปกติซึ่งจำเป็นต้องใช้ไปในการทดลองหรือเพื่อใช้กับงานที่ไม่สามารถทำการทดลองอย่างสมบูรณ์ได้ และยังสามารถแก้ปัญหาด้านอื่นๆในทางวิศวกรรม เหตุผลดังกล่าวนี้ทำให้ระเบียบวิธีนี้เป็นที่ยอมรับในหมู่วิศวกรนักออกแบบทั่วไป อย่างไรก็ตามการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จำเป็นต้องใช้ด้วยความรอบคอบและระมัดระวัง ผู้ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างเพียงพอ

บทความนี้กล่าวถึงการออกแบบตำแหน่งติดตั้งหน้าต่าง และบานประตู การปิดและเปิดในบ้านหรือตัวอาคารโดยใช้หลักทางทางพลศาสตร์ของไหล โดยประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วนสำคัญอย่างยิ่งของผู้พักอาศัยใช้เพียงแต่ความพึงพอใจในความสวยงามของตัวอาคาร ความมั่นคงแข็งแรงเท่านั้น ลักษณะการถ่ายเทของอากาศยังเป็นปัจจัยที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นสาเหตุดังกล่าว จึงได้เกิดแนวความคิดที่จะพัฒนาการแก้ปัญหาให้เกิดประโยชน์อันสูงสุด บทความนี้ได้อธิบายระเบียบขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ไว้โดยละเอียด

1. กระบวนการแก้ปัญหาทางพลศาสตร์ของไหล

การวิเคราะห์ปัญหาด้านต่างๆ ทางกลศาสตร์ของไหลทางวิศวกรรมปัญหาทางด้านการไหลของอากาศผ่านบานประตูหรือขอบหน้าต่างของอาคาร ผลลัพธ์ที่เกิดจากการวิเคราะห์ปัญหาเหล่านี้ขึ้นอยู่กับปัจจัยหรือองค์ประกอบใหญ่ๆ 3 องค์ประกอบ (ปราโมทย์, 2545), (Robert, Alan and Philip, 2006) กล่าวคือ(ก) ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Partial Differential Equations) ที่อธิบายความเป็นจริงของปัญหานั้น (ข) เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) และ (ค) ลักษณะรูปร่าง (Geometry) (ปราโมทย์, 2546) ของปัญหานั้นทั้งสามองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งเปลี่ยนแปลงไป ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็จะเปลี่ยนแปลงไปด้วย ความเข้าใจโดยลึกซึ่งในองค์ประกอบทั้งสามนี้ มีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อการวิเคราะห์ปัญหาด้วยการคำนวณ ความสำคัญในแต่ละองค์ประกอบที่จำเป็นต้องทำความเข้าใจซึ่งสามารถอธิบายในภาพรวมได้ดังนี้

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์สโตร์คของการไหลในสองมิติ

ปัญหาในงานวิศวกรรมต่างมีความลึกซึ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แตกต่างกันออกไป สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสามารถจัดได้ว่าเป็นหัวใจ ซึ่งแสดงถึงความ เป็นจริงที่เกิดขึ้นในปัญหานั้นๆ ซึ่งลักษณะการไหลโดยทั่วไปที่พบบันมากหรือในความเป็นจริงในชีวิตประจำวัน ก็คือการไหลแบบมีความหนืดแต่ไม่อัดตัว (Viscous Incom - pressible Flow) (Robert, Alan and Philip, 2006) อันประกอบไปด้วย ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังแสดงในหัวข้อต่อไปนี้

1.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Partial Differential Equation)

ปัญหาในงานวิศวกรรมต่างมีความลึกซึ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่แตกต่างกันออกไป สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสามารถจัดได้ว่าเป็นหัวใจซึ่งแสดงถึงความ เป็นจริงที่เกิดขึ้นในปัญหานั้นๆ ซึ่งลักษณะการไหลโดยทั่วไปที่พบบันมากหรือในความเป็นจริงในชีวิตประจำวันก็คือ การไหลแบบมีความหนืดแต่ไม่อัดตัว (Viscous Incompressible Flow) อันประกอบไปด้วย

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ในรูปแบบเทนเซอร์ (tensor) ดังนี้

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลในสองมิติ ในรูปแบบเทนเซอร์

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho(u u_x + v u_y) - (\bar{\sigma}_{x,x} + \tau_{yx,y}) = 0 \tag{1ก}$$

$$\rho(u v_x + v v_y) - (\tau_{xy,x} + \bar{\sigma}_{y,y}) = 0 \tag{1ข}$$

สมการการอนุรักษ์มวล

$$u_x + v_y = 0 \tag{2}$$

ซึ่งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนสามารถเขียนในรูปแบบของเทนเซอร์เช่นกัน คือ

$$\bar{\sigma}_x = 2\mu u_x - p \tag{3ก}$$

$$\bar{\sigma}_y = 2\mu v_y - p \tag{3ข}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(u_y + v_x) \tag{3ค}$$

โดยเครื่องหมายจุลภาค (Comma) แทนความหมายของค่าอนุพันธ์ (derivative)

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตร์ค (3ก-ค) ที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสามสมการนี้จะทำการแก้เพื่อหาผลลัพธ์ของลักษณะการกระจายสำหรับตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ ค่าของความเร็ว u , v และค่าของความดัน p โดยพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (1ก-ข) เป็นพจน์ของความเฉื่อยอันเนื่องมาจากการพาที่เกิดขึ้นจากการไหล พจน์เหล่านี้มีค่าความเร็ว u , v เป็นค่าสัมประสิทธิ์อยู่ หากความเร็ว u และ v มีค่ามากก็จะทำให้พจน์นี้มีค่ามากซึ่งจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มากตามขึ้นไปด้วย และหากค่าความเร็ว u และ v ต่ำทำให้สามารถละพจน์เหล่านี้ทิ้งไปได้ ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตดังเช่นแสดงในรูปที่ 1 อันประกอบด้วย

1. การกำหนดค่าของความเร็วตลอดขอบ S_1

$$u = u_1(x, y)$$

$$v = v_1(x, y)$$

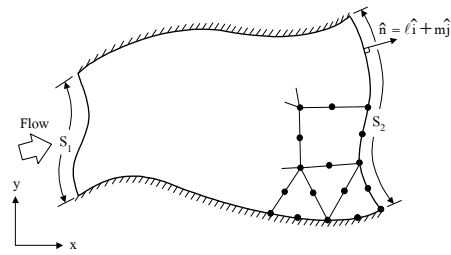
2. การกำหนดแรงรวมที่ผิว (surface traction)

ตลอดขอบ S_2

$$T_x = \bar{\sigma}_x \ell + \tau_{yx} m$$

$$T_y = \tau_{xy} \ell + \bar{\sigma}_y m$$

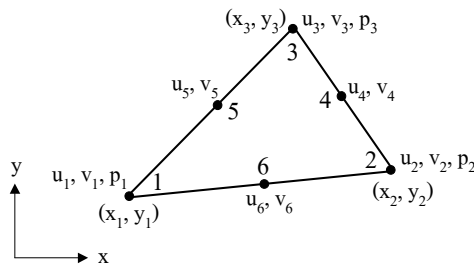
และ ℓ และ m แทนทิศทางโคซายน์ (direction cosines) ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \hat{n} ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น ส่วน T_x และ T_y เป็นแรงรวมที่ผิวในทิศแกน x และ y ตามลำดับ



รูปที่ 1 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหล

1.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืด แต่ไม่อัดตัวซึ่งรวมพจน์ของความเฉื่อย โดยจะประกอบไปด้วยตัวแปรที่ต้องหาค่า คือ ความเร็ว u ความเร็ว v และความดัน p เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 2 จะนำมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกัน การกระจายของความเร็วและความดันภายในเอลิเมนต์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของตัวที่ไม่ทราบค่าที่จุดต่อดังนี้



รูปที่ 2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

$$u = u(x, y) = N_\alpha u_\alpha \quad ; \tag{4ก}$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$v = v(x, y) = N_\alpha v_\alpha \quad ; \tag{4ข}$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$p = p(x, y) = H_{\eta} p_{\eta} \quad ; \quad \eta = 1, 2, 3 \quad (4ค)$$

เนื่องจาก สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะประดิษฐ์ขึ้นมาจำเป็นต้องใช้ได้กับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันได้ แต่สมการ (4ก-ค) ประกอบด้วยพจน์ต่าง ๆ ที่ล้วนอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่าง และใช้จะประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์(Gauss theorem) (ปราโมทย์, 2546) และทำการแทนค่าความเค้นในรูปแบบของความเร็วและความดันที่แสดงในสมการที่ (4ก-ค) จากนั้น ทำการหารตลอดทั้งสองสมการข้างบนนี้ด้วยค่าความหนาแน่น ρ แล้วกำหนดให้ค่าความหนืดจลนศาสตร์ (kinematic viscosity) (Robert, Alan and Philip, 2006) ซึ่งคือ

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (5)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่สอดคล้องกับโมเมนต์ (1 ก-ข) ในแนวแกน x และ y จะกลายมาเป็น

$$\begin{aligned} & \int_A N_i u u_{,x} dA + \int_A N_i v u_{,y} dA \\ & - \frac{1}{\rho} \int_A N_{i,x} p dA + 2v \int_A N_{i,x} u_{,x} dA \\ & + v \int_A N_{i,y} u_{,y} dA + v \int_A N_{i,y} v_{,x} dA \\ & = \frac{1}{\rho} \int_S N_i T_x dS \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_A N_i u v_{,x} dA + \int_A N_i v v_{,y} dA \\ & - \frac{1}{\rho} \int_A N_{i,y} p dA + v \int_A N_{i,x} u_{,y} dA \\ & + v \int_A N_{i,x} v_{,x} dA + 2v \int_A N_{i,y} v_{,y} dA \\ & = \frac{1}{\rho} \int_S N_i T_y dS \end{aligned} \quad (6ข)$$

พร้อมกับสมการ (7.18ค) ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์มวลซึ่งนำมาเขียนรวมกันในที่นี้อีกครั้งคือ

$$\int_A H_i (u_{,x} + v_{,y}) dA = 0 \quad (7)$$

สมการ (6ก-ข) และ (7) ที่สอดคล้องกับโมเมนต์ในแนวแกน x และ y รวมทั้งสมการอนุพันธ์มวลนี้ ประกอบด้วยพจน์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A หรือตลอดขอบ S ของเอลิเมนต์ที่พิจารณานั้น ซึ่งอาจจะเป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ ลักษณะการกระจายของความเร็วในแนวแกน x และ y ของเอลิเมนต์เหล่านี้จากสมการ (4ก-ข) ในรูปแบบของเทนเซอร์คือ

$$u = u(x, y) = N_{\alpha} u_{\alpha} \quad (8ก)$$

$$\text{และ } v = v(x, y) = N_{\alpha} v_{\alpha} \quad (8ข)$$

ซึ่งตรงนี้ตัวห้อยซ้ำ (Repeated index) แทนความหมายของการบวก (summation) ส่วนลักษณะการกระจายของค่าความดันบนเอลิเมนต์จากสมการ (4ค) ในรูปแบบของเทนเซอร์คือ

$$p = p(x, y) = H_{\eta} p_{\eta} \quad (8ค)$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u และ v ในทิศแกน x และ y คือ

$$u_{,x} = N_{\alpha,x} u_{\alpha} \quad ; \quad u_{,y} = N_{\alpha,y} u_{\alpha} \quad (9ก)$$

$$v_{,x} = N_{\alpha,x} v_{\alpha} \quad ; \quad v_{,y} = N_{\alpha,y} v_{\alpha} \quad (9ข)$$

แทนสมการ สมการ (8ก-ค) และ (9ก-ข) ลงในสมการ (6ก-ข) และ (7) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนต์ และสมการเชิงอนุพันธ์มวลซึ่งอยู่ในรูปเมทริกซ์ต่าง ๆ โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้อย่างกระชับได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & K_{\alpha\beta\gamma x} u_{\beta} u_{\gamma} + K_{\alpha\beta\gamma y} v_{\beta} v_{\gamma} - H_{\alpha\mu x} p_{\mu} \\ & + S_{\alpha\beta xx} u_{\beta} + S_{\alpha\beta xy} v_{\beta} = Q_{\alpha x} \end{aligned} \quad (10ก)$$

$$\begin{aligned} & K_{\alpha\beta\gamma x} u_{\beta} v_{\gamma} + K_{\alpha\beta\gamma y} v_{\beta} v_{\gamma} - H_{\alpha\mu y} p_{\mu} \\ & + S_{\alpha\beta yx} u_{\beta} + S_{\alpha\beta yy} v_{\beta} = Q_{\alpha y} \end{aligned} \quad (10ข)$$

$$H_{\beta\mu x} u_{\beta} + H_{\beta\mu y} v_{\beta} = 0 \quad (10ค)$$

โดย

$$K_{\alpha\beta\gamma x} = \int_A N_{\alpha} N_{\beta} N_{\gamma,x} dA \quad (11ก)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma y} = \int_A N_{\alpha} N_{\beta} N_{\gamma,y} dA \quad (11ข)$$

$$H_{\alpha\mu x} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} H_{\mu} dA \quad (11ค)$$

$$H_{\alpha\mu y} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,y} H_{\mu} dA \quad (11ง)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \\ + v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (11จ)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA \quad (11ฉ)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (11ช)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \\ + 2v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (11ซ)$$

$$Q_{\alpha x} = \frac{1}{\rho} \int_S N_{\alpha} T_x dS \quad (11ฅ)$$

$$Q_{\alpha y} = \frac{1}{\rho} \int_S N_{\alpha} T_y dS \quad (11ณ)$$

เมทริกซ์ต่าง ๆ ดังแสดงในสมการ (11ก-ญ) ล้วนอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A หรือขอบ S ของเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงขึ้นอยู่กับแบบของเอลิเมนต์ที่ใช้เมทริกซ์ต่าง ๆ เหล่านี้จะพิจารณาโดยละเอียดในหัวข้อต่อไป

1.3 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ (Yamada, et al., 1975) (Hood and Talor, 1974) ดังแสดงในรูปที่ 2 จะนำมาใช้เพื่อประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ทั้งนี้เนื่องจากเมทริกซ์ต่าง ๆ จากเอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ในรูปแบบปิด (closed form) โดยไม่ต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข ทำให้สะดวกในการทำ ความเข้าใจและการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ในสมการ (11ก-ญ) เพื่อใช้ในสมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์ (10ก-ค) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อนี้ เริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ N_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (12)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}^T \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (13)$$

หรือในรูปแบบของเทนเซอร์

$$N_{\alpha} = A_{\alpha\xi} R_{\xi} \quad (14)$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในแนวแกน x สามารถหาได้จากสมการ (13) ดังนี้ หรือในรูปแบบของเทนเซอร์

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} \quad (15)$$

โดย $\eta = 1, 2, 3$ ในทำนองเดียวกัน ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในแนวแกน y สามารถหาได้จากสมการ (13) ได้เช่นกัน ดังนี้ หรือในรูปแบบของเทนเซอร์

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_{\eta} \quad (16)$$

เมื่อทราบค่าฟังก์ชันการประมาณภายในและค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันนี้ทั้งในแนวแกน x และ y ดังแสดงในสมการ (13) – (16) ในรูปแบบของเมทริกซ์และเทนเซอร์แล้ว เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ดังแสดงในสมการ (11ก-ญ) จึงสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ ดังต่อไปนี้

เมทริกซ์ $S_{\alpha\beta^{xx}}, S_{\alpha\beta^{xy}}, S_{\alpha\beta^{yx}}, S_{\alpha\beta^{yy}}$ ในสมการ (11จ-ซ)

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \\ + v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \\ = 2v \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} H_{\mu} dA \\ + v \int_A A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_{\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} H_{\mu} dA \\ S_{\alpha\beta^{xx}} = 2v M_{\alpha\beta^{xx}} + v M_{\alpha\beta^{yy}} \quad (17ก)$$

โดย $\beta, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ ในทำนองเดียวกัน

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA = v M_{\alpha\beta^{xy}} \quad (17ข)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA = v M_{\alpha\beta^{yx}} \quad (17ค)$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta^{yy}} &= v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \\ &+ 2v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \\ &= v M_{\alpha\beta^{xx}} + 2v M_{\alpha\beta^{yy}} \end{aligned} \quad (17ง)$$

ในที่นี้ จากสมการ (17ก)

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (18ก)$$

$$M_{\alpha\beta^{xy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (18ข)$$

$$M_{\alpha\beta^{yx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (18ค)$$

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (18ง)$$

โดยเมทริกซ์ $G_{\eta\mu}$ คือ

$$\begin{aligned} [G] &= \int_A \{H\} [H] dA \\ (3 \times 3) & \quad (3 \times 1) \quad (1 \times 3) \\ &= \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (19)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\eta, \mu = 1, 2, 3$

เมทริกซ์ $H_{\alpha\mu^x}$ และ $H_{\alpha\mu^y}$ ในสมการ (11ค-ง)

$$\begin{aligned} H_{\alpha\mu^x} &= \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} H_{\mu} dA \\ &= \frac{1}{\rho} \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} H_{\mu} dA \\ &= \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} \int_A H_{\eta} H_{\mu} dA \\ H_{\alpha\mu^x} &= \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} G_{\eta\mu} \end{aligned} \quad (20ก)$$

ในการทำงานเดียวกัน

$$H_{\alpha\mu^y} = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} G_{\eta\mu} \quad (20ข)$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\eta, \mu = 1, 2, 3$

เมทริกซ์ Q_{α^x} และ Q_{α^y} ในสมการ (11ฉ-ญ)

เมทริกซ์ทั้งสองนี้ต่างอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลตลอดขอบ S ของเอลิเมนต์ ซึ่งแปลงแรงภายนอกที่มากระทำตลอดขอบนั้นไปเป็นแรงที่จุดตอบนขอบนั้นแล้ว ดังนั้น

$$Q_{\alpha^x} = \frac{1}{\rho} \int_S N_{\alpha} T_x dS \quad ; \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (21)$$

ในการทำงานเดียวกัน เมทริกซ์ Q_{α^y} ก็สามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการเช่นเดียวกัน อนึ่งสำหรับขอบของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนของการไหล เมทริกซ์ทั้งสองนี้เองแทนแรงที่ขอบของเอลิเมนต์นั้น ๆ ซึ่งแรงที่ขอบเหล่านี้จากต่างเอลิเมนต์กันจะหักล้างกันไปเองหลังจากนำเอลิเมนต์ต่าง ๆ มาประกอบเข้าด้วยกัน ดังนั้นในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงไม่ต้องทำการคำนวณหาค่าของเมทริกซ์ทั้งสองนี้ ยกเว้นปัญหาที่พิจารณานั้นมีการกำหนดแรงที่ขอบนอกของโดเมนการไหล

เมทริกซ์ $K_{\alpha\beta\gamma^x}$ และ $K_{\alpha\beta\gamma^y}$ ในสมการ (11ก-ข)

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta\gamma^x} &= \int_A N_{\alpha} N_{\beta} N_{\gamma,x} dA \\ &= \int_A A_{\alpha\xi} R_{\xi} A_{\beta\lambda} R_{\lambda} A_{\gamma\zeta} B_{\zeta\mu} H_{\mu} dA \\ &= A_{\alpha\xi} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\zeta} B_{\zeta\mu} \int_A R_{\xi} R_{\lambda} H_{\mu} dA \\ K_{\alpha\beta\gamma^x} &= A_{\alpha\xi} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\zeta} B_{\zeta\mu} F_{\xi\lambda\mu} \end{aligned} \quad (22)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda, \gamma, \zeta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$

เมทริกซ์ $F_{\xi\lambda\mu}$ ในสมการ (22) นี้อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A ของเอลิเมนต์ซึ่งคือ

$$F_{\xi\lambda\mu} = \int_A R_{\xi} R_{\lambda} H_{\mu} dA \quad (23)$$

ซึ่งสามารถประดิษฐ์ขึ้นให้อยู่ในรูปแบบปิดได้เนื่องจาก

$$R_\xi R_\lambda =$$

$$\begin{bmatrix} L_1^4 & L_1^2 L_2^2 & L_1^2 L_3^2 & L_1^2 L_2 L_3 & L_1^3 L_3 & L_1^3 L_2 \\ L_1^2 L_2^2 & L_2^4 & L_2^2 L_3^2 & L_2^3 L_3 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1 L_2^3 \\ L_1^2 L_3^2 & L_2^2 L_3^2 & L_3^4 & L_2 L_3^3 & L_1 L_3^3 & L_1 L_2 L_3^2 \\ L_1^2 L_2 L_3 & L_2^3 L_3 & L_2 L_3^3 & L_2^2 L_3^2 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1 L_2^2 L_3 \\ L_1^3 L_3 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1 L_3^3 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1^2 L_3^2 & L_1^2 L_2 L_3 \\ L_1^3 L_2 & L_1 L_2^3 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1^2 L_2 L_3 & L_1^2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} dA = A_{\alpha\xi} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\zeta} C_{\zeta\mu} F_{\xi\lambda\mu} \quad (25)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda, \gamma, \zeta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ เช่นกัน

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ในรูปแบบของอินทิกรัล (11ก-ง) ซึ่งได้ประ-ดิษฐ์ขึ้นในรูปแบบของเทนเซอร์ที่แสดงในสมการ (17-25) นี้ได้นำไปใช้เพื่อการประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน แต่เนื่องจากเอลิเมนต์เมทริกซ์เหล่านี้ฝังตัวอยู่ในระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (10 ก-ค) ซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (set of nonlinear equations) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำ(iteration method) (ปราโมทย์, 2546) เข้าสู่ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ก่อนทำการแก้เพื่อหาผลลัพธ์ที่จะอธิบายในหัวข้อต่อไป

1.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แสดงในสมการ (10 ก-ค) นั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่ารวม 15 ตัว คือ ความเร็ว u และ v ที่จุดต่ออย่างละ 6 ตัว และความดัน p ที่จุดต่อมุมของเอลิเมนต์อีก 3 ตัว ระบบสมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปอันประกอบด้วย n สมการ ดังนี้

$$[K(x)] \{X\} = \{R\} \quad (26)$$

(nxn) (nx1) (nx1)

โดย $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ ที่ต้องการหา $[K(x)]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด (nxn) ซึ่งบรรจุตัวไม่รู้ค่า x_i อยู่ด้วย และ $\{R\}$ เป็นเวกเตอร์ที่รู้ค่า ดังนั้นการแก้สมการ (26) ด้วยวิธีโดยตรง

ใด ๆ เพียงครั้งเดียวเพื่อหาตัวไม่รู้ค่า x_i ที่ถูกต้องจึงเป็นไปได้ จำเป็นต้องประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำบางอย่างเพื่อให้ตัวไม่รู้ค่า x_i เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันแพร่หลายคือระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (NewtonRaphson iteration method) (ปราโมทย์, 2546)

จากระบบสมการดังกล่าวข้างต้น เขียนเป็นสมการทางเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} G_{\alpha\beta^x} & L_{\alpha\beta^y} & -H_{\alpha\mu^x} \\ L_{\alpha\beta^x} & G_{\alpha\beta^y} & -H_{\alpha\mu^y} \\ H_{\beta\mu^x} & H_{\beta\mu^y} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_\beta \\ \Delta v_\beta \\ \Delta p_\mu \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{\alpha^x} \\ F_{\alpha^y} \\ F_\mu \end{Bmatrix} \quad (27)$$

(6x6) (6x6) (6x3) (6x1) (6x1) (6x1) (6x1) (3x3) (3x1)

โดย

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \quad (28ก)$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \quad (28ข)$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \quad (28ค)$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \quad (28ง)$$

เมทริกซ์จัตุรัสขนาด (15x15) ทางด้านซ้ายมือของระบบสมการ (27) ของเอลิเมนต์ที่พิจารณาข้างต้นขึ้นอยู่กับความเร็ว u_γ และ v_γ ที่จุดต่อดังแสดงในสมการ (28ก-ง) ระบบสมการ (27) นี้จะถูกสร้างขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ทั่วทั้งโดเมนของการไหลก่อนประกอบรวมเข้าจากทุก ๆ เอลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบสมการขนาดใหญ่ การคำนวณจะเริ่มจากการกำหนดค่าความเร็ว u และ v รวมทั้งค่าความดัน p เริ่มต้น จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้นที่กำหนดมาให้แล้วจึงทำการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ขึ้นเพื่อหาค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\Delta u, \Delta v$ และ Δp ที่จุดต่อต่างๆ

ค่าการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นนี้จะนำไปรวมเข้ากับค่าก่อนหน้านั้นก่อให้เกิดเป็นค่าของผลลัพธ์ใหม่ ดังนี้

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u_i^{k+1} \quad (29ก)$$

$$v_i^{k+1} = v_i^k + \Delta v_i^{k+1} \quad (29ข)$$

$$p_i^{k+1} = p_i^k + \Delta p_i^{k+1} \quad (29ค)$$

โดย k แทนการทำซ้ำครั้งที่ k^{th} กระบวนการทำซ้ำในลักษณะเช่นนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อค่าการเปลี่ยนแปลงของ Δu , Δv และ Δp ของทุก ๆ จุดต่อนั้นเข้าใกล้ศูนย์ในทางปฏิบัติ ค่าการเปลี่ยนแปลงนี้อาจคิดเป็นค่าการเปลี่ยนแปลงรวม (overall error) ของทุก ๆ จุดต่อทั้งระบบ เช่น

$$\text{Overall error} = \frac{\text{error}}{\text{sum}} \times 100\% \quad (30)$$

โดย

$$\text{Error} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIP}} (\Delta p_j) \quad (31ก)$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIP}} (p_j) \quad (31ข)$$

ซึ่ง NPOIV และ NPOIP แทนจำนวนจุดต่อของความเร็วและความดันทั้งหมดในโดเมนของการไหล

ขั้นตอนในกระบวนการทำซ้ำรวมกับความซับซ้อนของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังอธิบายข้างต้นนี้แสดงให้เห็นว่าการแก้ปัญหาการไหลนั้นจำเป็นต้องดำเนินการด้วยความระมัดระวัง โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับปัญหาขนาดใหญ่ที่ประกอบด้วยจุดต่อเป็นจำนวนมากจะใช้ทั้งปริมาณหน่วยความจำและเวลาในการคำนวณมากขึ้นไปด้วย และเพื่อให้เกิดความสมบูรณ์ในการแก้ปัญหาคารไหลแบบหนืดที่รวมความเฉื่อยเข้าด้วยนี้

2. การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions)

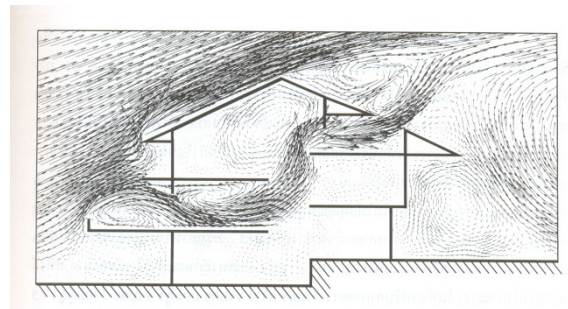
ในกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น เงื่อนไขขอบเขตเป็นองค์ประกอบสำคัญ อันจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่สอดคล้องกันขึ้น หากปัญหาที่ทำการวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบไม่อยู่ตัว (Unsteady) เงื่อนไข

เริ่มต้น (Initial Conditions) จำเป็นต้องถูกประยุกต์เข้าด้วยกัน เงื่อนไขขอบเขตที่เปลี่ยนแปลงไปจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปด้วยเช่นกัน

3. ลักษณะรูปร่าง (Geometry) และ ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์

ในบทความนี้ไม่ได้แสดงรายละเอียดของตัวโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์และการประยุกต์ใช้ ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน แต่จะแสดงผลลัพธ์ที่ได้ซึ่งลักษณะปัญหาโดยทั่วไปในงานทางด้านวิศวกรรม โดยส่วนมากจะถูกออกแบบ หรือมีลักษณะรูปร่างที่มีความสลับซับซ้อนอยู่เสมอตัวอย่างของปัญหาที่ใช้ในการวิเคราะห์ในบทความนี้คือ

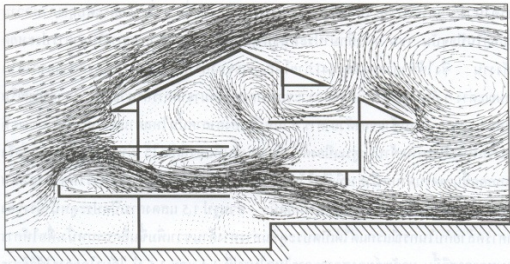
ลักษณะปัญหาที่ 1 ปัญหาการไหลของอากาศผ่านบ้านที่มีห้องในระดับต่างกันด้านหลังคาเอียง



รูปที่ 3 เวกเตอร์ความเร็วของอากาศที่ถ่ายเทผ่านบ้านเมื่อเปิดหน้าต่างชั้นบนเพียงบานเดียว

ตัวอย่างดังกล่าวนี้อาศัยการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล ที่จะช่วยยกระดับคุณภาพความเป็นอยู่ในปัจจุบันซึ่งก็คือการศึกษาประสิทธิภาพของการระบายอากาศในอาคารประหยัดพลังงาน ซึ่งได้ทำการทดสอบกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของการไหลโดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตร์คในบทความนี้ดังรูปที่ 3 แสดงการถ่ายเทของอากาศภายใต้สภาวะของการเปิดหน้าต่างเพื่อระบายอากาศซึ่งสภาวะของอากาศที่ได้มาจากการคำนวณ โดยที่อากาศเริ่มไหลมาปะทะทางด้านซ้ายของตัวอาคารส่วนหนึ่งของอากาศนั้นไหลผ่านข้ามหลังคา ในขณะที่อีกส่วนหนึ่งไหลผ่านเข้าประตูระเบียงด้านซ้ายของชั้นสองที่เปิดไว้ผ่านภายในตัวอาคารบ้าน แล้วจึงไหลออกขึ้นฟ้าเพดานผ่านหน้าต่างที่เปิดไว้ทางด้านขวาของ

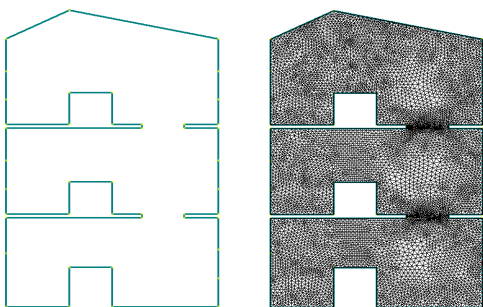
หลังคาในขณะที่เดียวกันลักษณะการไหลในห้องอื่นๆของตัวอาคารนั้นค่อนข้างจะอยู่นิ่งหรือแทบจะไม่มีกาไหลของอากาศเลย



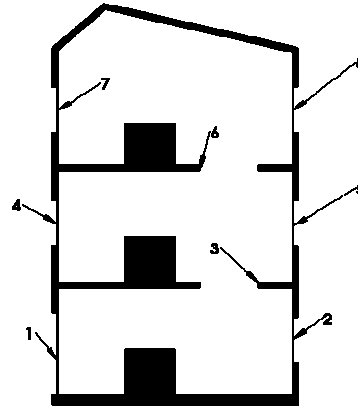
รูปที่ 4 เวกเตอร์ความเร็วของอากาศที่ถ่ายเทผ่านบ้านเมื่อเปิดหน้าต่างชั้นบนและชั้นล่างพร้อมกัน

ซึ่งการวิเคราะห์ในทำนองเดียวกันนี้ ภายใต้สภาวะเงื่อนไขเริ่มต้นเดียวกัน แต่ทำการเปลี่ยนแปลงเปิดประตูและหน้าต่างของตัวบ้านที่คล้ายกับในกรณีแรก เพียงแต่ได้เปิดประตูในชั้นล่างทางด้านขวาเพิ่มขึ้นอีกบานหนึ่งเพื่อให้การถ่ายเทอากาศดีขึ้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบโดยใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4 แสดงสภาวะการไหลดังนี้การเปิดประตูชั้นล่างเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งบาน แสดงให้เห็นว่าลักษณะการถ่ายเทของอากาศเกิดการถ่ายเทได้ดีมากยิ่งขึ้นกว่ากรณีแรกอีกทั้งยังแสดงให้เห็นว่าการถ่ายเทของอากาศในห้องอื่นๆ เกิดการถ่ายเทและการไหลเวียนของอากาศที่มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ลักษณะปัญหาที่ 2 คือ ปัญหาการไหลของอากาศผ่านอาคารชั้นรูปแบบต่างๆ เพื่อหารูปแบบที่มีการระบายอากาศที่เหมาะสม โดยมีการกำหนดขอบเขตเงื่อนไขให้ความเร็วในแกน x เท่ากับ 0.4 เมตร/วินาที, ความหนาแน่นของอากาศเท่ากับ 1.3 กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร, มีค่าความหนืดเท่ากับ 0.18 กิโลกรัม·เมตร และการแบ่งเอลิเมนต์เป็นแบบสามเหลี่ยมดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 แบบอาคารและลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์



รูปที่ 6 ช่องการไหลเข้าออกของอากาศ

ตารางที่ 1 รูปแบบการวิเคราะห์การไหลของอากาศผ่านตัวอาคาร

ลำดับที่	ช่องไหลเข้า(In flow)	ช่องไหลออก(Out flow)	ช่องปิด(Close)
1	1	2, 5, 8	4, 7
2	4	2, 5, 8	1, 3
3	7	2, 5, 8	1, 4
4	1, 7	2, 5, 8	4
5	4, 7	2, 5, 8	1, 8
6	1, 4, 7	2, 8	5
7	1	2, 4, 5, 7, 8	-
8	1	4, 7	2, 5, 8
9	1	1	2, 4, 5, 7, 8

ผลลัพธ์จากลักษณะปัญหาที่ 2 นี้ มีลักษณะในทำนองเดียวกันกับที่เกิดขึ้นในปัญหาที่ 1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเปิดเพียงหน้าต่างที่แตกต่างกันเพียง 1 บานนั้นสามารถถ่ายเทอากาศภายในตัวอาคารได้ดีขึ้น ดังนั้นในทำนองเดียวกันกับลักษณะปัญหาที่ 2 ถ้ามีช่องไหลออกจำนวนมากก็ยังสามารถถ่ายเทอากาศภายในตัวอาคารได้ดี ประสิทธิภาพการไหลเวียนของอากาศก็มีประสิทธิภาพมาก จากรูปแบบการไหลของอากาศผ่านตัวอาคารจะเห็นว่ารูปแบบลำดับที่ 7 มีช่องการไหลออกที่มากที่สุด ดังนั้นจึงมีการถ่ายเทของอากาศผ่านตัวอาคารได้ดีที่สุด และรูปแบบการไหลของอาคารผ่านตัวลำดับที่ 9 มีช่องการไหลออกช่องทางเดียวกับช่องไหลเข้า และยังมีช่องปิดอีกจำนวนมาก ดังนั้นการถ่ายเทของอากาศผ่านตัวตึกจะมีการถ่ายเทได้น้อย ประสิทธิภาพการไหลเวียนของอากาศก็มีประสิทธิภาพต่ำตามไปด้วย

จากตัวอย่างทั้ง 2 ตัวอย่างจะเห็นได้ว่าหากเข้าใจในกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างละเอียดก็จะสามารถคำนวณโดยใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ การทดลองนี้สามารถทำการคำนวณได้ภายในระยะเวลาอันสั้น และยังแสดงให้เห็นลักษณะการไหลเวียนของอากาศอย่างชัดเจนอันจะนำไปสู่การออกแบบที่ดีและถูกต้องอันจะทำให้เกิดประสิทธิภาพ อันสูงสุดอีกทั้งยังจะช่วยลดขั้นตอนในการทำการทดลอง ซึ่งทำให้เกิดประโยชน์อันมากมาย ไม่ทำให้เกิดการลองผิดลองถูก และยังช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างและติดตั้งอุปกรณ์อีกด้วย

4. บทสรุป

บทความนี้ได้แสดงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อการแก้ปัญหาการไหล นอกจากนี้ยังได้อธิบายความสำคัญ การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยละเอียด และอธิบายหลักการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนพร้อมทั้งยกตัวอย่างการวิเคราะห์ ดังเช่นได้อธิบายการประยุกต์ใช้ในการไหลผ่านภายใน ของตัวอาคารที่ทำการเปิดหรือปิดหน้าต่าง หรือบานประตูซึ่งสามารถวิเคราะห์ลักษณะของการไหลโดยแสดงให้เห็นเป็นรูปแบบของเวกเตอร์ของความเร็วซึ่งแสดงทั้งขนาดและทิศทางอย่างชัดเจนหากเราเปลี่ยนโครงสร้างของอาคารเช่นหลังคา หรือตำแหน่งการเปิดปิดของประตู หรือหน้าต่างก็จะเห็นว่ารูปแบบลักษณะการไหลก็จะเปลี่ยนไป ดังนั้นสามารถใช้ประโยชน์จากการทำนายลักษณะการไหลเพื่อหาตำแหน่งการติดตั้งที่เหมาะสมได้ นอกจากนี้ยัง

สามารถนำกระบวนการขั้นตอนที่แสดงโดยละเอียดดังกล่าวนี้ไปวิเคราะห์ลักษณะปัญหาอื่นๆได้อีกหลากหลายตามปัญหาที่ต้องการทำการวิเคราะห์

เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ , 2545. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์: เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล, พิมพ์ครั้งที่ 1 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ , 2546. การวิเคราะห์และออกแบบงานทางวิศวกรรมด้วย ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, พิมพ์ครั้งที่ 1 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม.

Hood, P. and Tabor, C., (1974) "Navier Stokes Equations Using Mixed Interpolation", Finite Element Method in Flow Problems, Edited by Oden, T. J., Zienkeiwicz, O. C., Gallagher, R. H. and Taylor, C., University of Alabama Press, Huntsville, pp.121-132.

Robert W. Fox, Alan T. McDonald, Philip J Pritchard., (2006). Introduction to Fluid Mechanics

Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, Y., Tamano, T. and Ohtsubo, T., (1975). "Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow", Finite Elements in Fluids, Edited by Gallagher, R. H., Oden, J. T., Tabor, C. and Zienkeiwicz, O. C., Wiley, New York, pp.73-94.