วิธีการสำหรับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่

A Procedure for the Integral of odd power of the cosecant function

วิชญา รัตนเมธาวี* และ นงนุช แสงสุระ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
อ. เมือง จ. มหาสารคาม 44000
ชาญชัย หาญสีนาด
สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
อ. เมือง จ. มหาสารคาม 44000

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาถึงวิธีการสำหรับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่ ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้เทคนิคแบบ แยกส่วน (Integration by part) แต่ในงานวิจัยนี้จะแทนค่าโดยให้ $x=\cos\theta$ ดังนี้ $\int \csc^{2n+1}\theta d\theta=\int \frac{d\theta}{\sin^{2n+1}\theta}=\int \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^{2n+2}\theta}=\int \frac{\sin\theta d\theta}{\left(1-\cos^2\theta\right)^{n+1}}=-\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{n+1}}$ ซึ่งฟังก์ชัน $\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$ สามารถจัดรูปโดยใช้เศษส่วนย่อยและสัมประสิทธิ์ทวินาม เพื่อให้ $\int \csc^{2n+1}\theta d\theta$ ง่ายขึ้น

คำสำคัญ : *การหาปริพันธ์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทฤษฎีบททวินาม*

Abstract

Many calculus textbooks discuss the integral of products and powers of trigonometric functions. The most difficult of these is the integral of odd powers of the cosecant function and it is usually done by using integration by parts. But there is another natural approach to such an integral. An odd power of the cosecant function can be integrated by using the substitution $x=\cos\theta$ as follows:

$$\int \csc^{2n+1}\theta d\theta=\int \frac{d\theta}{\sin^{2n+1}\theta}=\int \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^{2n+2}\theta}=\int \frac{\sin\theta d\theta}{\left(1-\cos^2\theta\right)^{n+1}}=-\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{n+1}}$$

The last integral can be integrated by using partial fractions with the aid of the binomial theorem. The purpose of this note is to give the partial fraction decomposition of $\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$, allowing completion of the calculation of $\int \csc^{2n+1}\theta d\theta$.

Keywords: *integration, trigonometric function, Binomial Theorem*

1. บทนำ

ในการศึกษาวิชาแคลคูลลัสในเรื่องเทคนิคการหาปริพันธ์นั้น สำหรับฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่ โดยทั่วไปจะใช้เทคนิคแบบแยกส่วน ซึ่งเป็นเรื่องที่ค่อนข้างใช้เวลามาก สกล คงบุญ (2544) ได้ศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปฟังก์ชันโคเซแคนต์ โดยใช้การเปลี่ยนรูปฟังก์ชันให้เป็นฟังก์ชันพหุนาม $f(u)$ และ $g(v)$ ซึ่งเป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถหาปริพันธ์ได้โดยไม่ยากนัก สำหรับงานวิจัยนี้ก็จะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่ โดยจัดฟังก์ชันให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย และสัมประสิทธิ์ทวินามเพื่อให้ได้สูตรการหาปริพันธ์ที่ง่ายขึ้น

2. ความรู้พื้นฐาน

ทฤษฎีพื้นฐาน 1 ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) (โครงการตำราวิทยาศาสตร์ฯ, 2547)

สำหรับจำนวนเต็ม $n,k \geq 0$ และจำนวนจริง a,b ใด ๆ

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

ทฤษฎีพื้นฐาน 2 สำหรับจำนวนเต็ม $n,k \geq 0$ (โครงการตำราวิทยาศาสตร์ฯ, 2547)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

ทฤษฎีพื้นฐาน 3 สำหรับจำนวนเต็ม $n,k \geq 0$ (โครงการตำราวิทยาศาสตร์ฯ, 2547)

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0} = \ldots = \binom{n+k}{0} = 1$$

3. ผลการวิจัย

บทตั้ง 1 สำหรับจำนวนเต็ม $n,m \geq 0$ และจำนวนจริง r ใด ๆ

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m-k}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Inductions)

ให้ $P(m)$:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m-k}$$

พิจารณา เมื่อ $m=0$ จะได้

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{n+k}{n}r^k = \sum_{k=0}^{0}\binom{n+0+1}{k}r^k(1-r)^{0-k}$$

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{n+0}{n}r^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{n+1}{k}r^k(1-r)^{-k}$$

$$\frac{n!}{n!0!}r^0 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}r^0(1-r)^0$$

$$1 = 1$$

จะได้ว่า $P(0)$ เป็นจริง

ให้ $P(m)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m-k}$$

เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

พิจารณา

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{n+k}{n}r^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k + \binom{n+m+1}{n}r^{m+1}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m-k}\right] + \binom{n+m+1}{n}r^{m+1}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m-k}(r+1-r)\right] + \binom{n+m+1}{n}r^{m+1}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}\left(r^{k+1}(1-r)^{m-k} + r^k(1-r)^{m-k+1}\right)\right] + \binom{n+m+1}{m+1}r^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^{k+1}(1-r)^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m+1-k} + \binom{n+m+1}{m+1}r^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^{k+1}(1-r)^{m-k} + \sum_{k=0}^{m+1}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\binom{n+m+1}{k-1}r^{(k-1)+1}(1-r)^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^{m+1}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n+m+1}{k-1} r^k (1-r)^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n+m+1}{k-1} r^k (1-r)^{m+1-k} + \binom{n+m+1}{0} r^0 (1-r)^{m+1-0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{m+1-k}$$

$$= \binom{n+m+1}{0} (1-r)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} \left(\left[\binom{n+m+1}{k-1} + \binom{n+m+1}{k} \right] r^k (1-r)^{m+1-k} \right)$$

……… (1)

จากทฤษฎีพื้นฐาน 2 จะได้

$$\left[\binom{n+m+1}{k-1} + \binom{n+m+1}{k} \right] = \binom{n+m+2}{k}$$

แทนค่า $\binom{n+m+1}{k-1} + \binom{n+m+1}{k} = \binom{n+m+2}{k}$

ใน (1) จะได้

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{n} r^k = \binom{n+m+1}{0} (1-r)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n+m+2}{k} r^k (1-r)^{m+1-k}$$

$$= \binom{n+m+2}{0} (1-r)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n+m+2}{k} r^k (1-r)^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+m+2}{k} r^k (1-r)^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+(m+1)+1}{k} r^k (1-r)^{(m+1)-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+(m+1)+1}{k} r^k (1-r)^{(m+1)-k}$$

นั่นคือ $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} r^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{m-k}$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็ม $n, m \geq 0$ และจำนวนจริง r ใด ๆ

บทตั้ง 2 สำหรับจำนวนเต็ม $n, m \geq 0$ และจำนวนจริง r ใด ๆ

$$(1-r)^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} r^k + r^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} (1-r)^k = 1$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$(1-r)^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} r^k + r^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} (1-r)^k$$

$$= (1-r)^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{m-k} + r^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m+1}{k} (1-r)^k (1-(1-r))^{n-k}$$

$$= (1-r)^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{m-k} + r^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m+1}{k} (1-r)^k r^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{n+m+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m+1}{k} r^{n+m+1-k} (1-r)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m+1}{k} r^k (1-r)^{n+m+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m+1}{n+m+1-k} r^{n+m+1-k} (1-r)^k$$

… (2)

เนื่องจาก

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{m+n+1-k} (1-r)^k r^{m+n+1-k} = \sum_{j=m+1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{j} (1-r)^{n+m+1-j} r^j$$

แทนค่าใน (2) จะได้

$$(1-r)^{n+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k + r^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}(1-r)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{n+m+1-k}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+m+1}{n+m+1-k}r^{n+m+1-k}(1-r)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{n+m+1-k}$$

$$+\sum_{j=m+1}^{m+n+1}\binom{m+n+1}{j}(1-r)^{n+m+1-j}r^j$$

$$=\sum_{k=0}^{m+n+1}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{n+m+1-k}$$

……… (3)

จากทฤษฎีพื้นฐาน 1 จะได้

$$\sum_{k=0}^{m+n+1}\binom{n+m+1}{k}r^k(1-r)^{n+m+1-k}$$

$$=\binom{m+n+1}{0}r^0(1-r)^{m+n+1}$$

$$+\binom{m+n+1}{1}r^1(1-r)^{m+n}$$

$$+\binom{m+n+1}{2}r^2(1-r)^{m+n-1}$$

$$+\binom{m+n+1}{3}r^3(1-r)^{m+n-2}+\ldots$$

$$+\binom{m+n+1}{m+n+1}r^{m+n+1}(1-r)^0$$

$$=[r+(1-r)]^{m+n+1}$$

$$=1^{m+n+1}$$

$$=1$$

ดังนั้น

$$(1-r)^{n+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k + r^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}(1-r)^k = 1$$

ทฤษฎีบทที่ 3 สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\binom{2n+1-i}{n}}{2^{2n+2-i}}\left[\frac{1}{(1+x)^i}+\frac{1}{(1-x)^i}\right]$$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2

$$1=(1-r)^{n+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}r^k + r^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}(1-r)^k$$

ให้ $m=n$ และ $r=\left(\frac{1+x}{2}\right)$

จะได้ว่า

$$1-r=1-\left(\frac{1+x}{2}\right)=\frac{2-1-x}{2}=\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

ดังนั้น

$$1=\left[\frac{1-x}{2}\right]^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}\left[\frac{1+x}{2}\right]^k$$

$$+\left[\frac{1+x}{2}\right]^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}\left[\frac{1-x}{2}\right]^k$$

$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}\left[\frac{1-x}{2}\right]^{n+1}\left[\frac{1+x}{2}\right]^k$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}\left[\frac{1+x}{2}\right]^{n+1}\left[\frac{1-x}{2}\right]^k$$

$$1=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+k}{n}}{2^{n+k+1}}\left[(1-x)^{n+1}(1+x)^k+(1-x)^k(1+x)^{n+1}\right]$$

จะได้

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+k}{n}}{2^{n+k+1}}\left[\begin{array}{l}(1-x)^{n+1}(1+x)^k\\+(1-x)^k(1+x)^{n+1}\end{array}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+k}{n}}{2^{n+k+1}}\left[\frac{(1-x)^{n+1}(1+x)^k}{(1-x)^{n+1}(1+x)^{n+1}}+\frac{(1-x)^k(1+x)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}(1+x)^{n+1}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+k}{n}}{2^{n+k+1}}\left[\frac{1}{(1+x)^{n+1-k}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1-k}}\right]$$

ให้ $i=n+1-k$ จะได้

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\binom{2n+1-i}{n}}{2^{2n+2-i}}\left[\frac{1}{(1+x)^i}+\frac{1}{(1-x)^i}\right]$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\binom{2n+1-i}{n}}{2^{2n+2-i}}\left[\frac{1}{(1+x)^i}+\frac{1}{(1-x)^i}\right]$$

จากทฤษฎีบทที่ 3 พิจารณาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่ดังนี้

$$\int \csc^{2n+1}\theta d\theta = \int\frac{d\theta}{\sin^{2n+1}\theta}$$
$$=\int\frac{\sin\theta d\theta}{\sin^{2n+2}\theta}$$
$$=\int\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\cos^2\theta)^{n+1}}$$

ให้ $x=\cos\theta$ จะได้ว่า $dx=-\sin\theta d\theta$ ดังนั้น

$$\int \csc^{2n+1}\theta d\theta=-\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{n+1}}$$

$$=-\int\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\binom{2n+1-i}{n}}{2^{2n+2-i}}\left[\frac{1}{(1+x)^i}+\frac{1}{(1-x)^i}\right]dx$$

$$=-\int\frac{\binom{2n+1-1}{n}}{2^{2n+2-1}}\left[\frac{1}{(1+x)}+\frac{1}{(1-x)}\right]dx$$

$$-\int\frac{\binom{2n+1-2}{n}}{2^{2n+2-2}}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right]dx$$

$$-\int\frac{\binom{2n+1-3}{n}}{2^{2n+2-3}}\left[\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1-x)^3}\right]dx$$

$$-\int\frac{\binom{2n+1-4}{n}}{2^{2n+2-4}}\left[\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{1}{(1-x)^4}\right]dx$$

$$-\ldots$$

$$-\int\frac{\binom{2n+1-(n+1)}{n}}{2^{2n+2-(n+1)}}\left[\frac{1}{(1+x)^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]dx$$

$$=-\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$$

$$-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{\binom{2n+1-i}{n}}{(i-1)2^{2n+2-i}}\left[\frac{1}{(1-x)^{i-1}}-\frac{1}{(1+x)^{i-1}}\right]+C$$

$$=-\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{2n-i}{n}}{i2^{2n+1-i}}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)^i}-\frac{1}{(1+\cos\theta)^i}\right]+C$$

ดังนั้น $\displaystyle\int\csc^{2n+1}\theta d\theta=-\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{2n-i}{n}}{i2^{2n+1-i}}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)^i}-\frac{1}{(1+\cos\theta)^i}\right]+C$$

ตัวอย่างการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่

จงหาค่าของ $\int\csc^3\theta d\theta$

วิธีที่ 1 โดยวิธีการหาปริพันธ์แบบแยกส่วน (Integration by parts)

ให้ $u=\csc\theta$ และ $dv=\csc^2\theta d\theta$

จะได้ $du=-\csc\theta\cot\theta d\theta$ และ $v=-\cot\theta$

ดังนั้น $\int\csc^3\theta d\theta$

$$=-\csc\theta\cot\theta-\int\cot^2\theta\csc\theta d\theta$$
$$=-\csc\theta\cot\theta-\int(\csc^2\theta-1)\csc\theta d\theta$$
$$=-\csc\theta\cot\theta-\int\csc^3\theta d\theta+\int\csc\theta d\theta$$

$$2\int \csc^3\theta d\theta = -\csc\theta\cot\theta + \int \csc\theta d\theta$$
$$= -\csc\theta\cot\theta - \ln\left|\csc\theta + \cot\theta\right| + C$$

ดังนั้น $\int \csc^3\theta d\theta$

$$= -\frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta - \frac{1}{2}\ln\left|\csc\theta + \cot\theta\right| + C$$

วิธีที่ 2 โดยวิธีที่ได้จากงานวิจัยนี้

$$\int \csc^{2n+1}\theta d\theta = -\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{2n-i}{n}}{i2^{2n+1-i}}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)^i} - \frac{1}{(1+\cos\theta)^i}\right] + C$$

จะได้

$$\int \csc^3\theta d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)} - \frac{1}{(1+\cos\theta)}\right] + C$$

ซึ่งถ้าพิจารณาปริพันธ์ที่ได้จากวิธีที่ 2 จะสามารถจัดรูปให้ตรงกับวิธีที่ 1 ได้ดังนี้

$$-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)} - \frac{1}{(1+\cos\theta)}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{-1+\cos\theta+2}{1-\cos\theta}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{1+\cos\theta-(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left(-1+\frac{2}{1-\cos\theta}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{-1+\cos^2\theta+2+2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}\right) - \frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\csc\theta + \cot\theta\right| - \frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta$$

ดังนั้น

$$\int \csc^3\theta d\theta = -\frac{1}{2}\ln\left|\csc\theta + \cot\theta\right| - \frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta$$

จะพบว่าปริพันธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีนี้เท่ากัน

4. สรุปและเสนอแนะ

จากการศึกษาข้างต้นทำให้ได้ผลสรุปว่า สำหรับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่นั้น ซึ่งโดยทั่วไปมักใช้การหาปริพันธ์แบบแยกส่วน (Integration by parts) โดยจะต้องทำการลดทอนเลขชี้กำลังของฟังก์ชันลงไปเรื่อย ๆ จาก $2n+1$ ลดลงไปจนเหลือเลขชี้กำลังของฟังก์ชันเป็น 1 แต่ในงานวิจัยนี้ได้ผลลัพธ์เป็นสูตรสำเร็จเพื่อใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่ คือ

$$\int \csc^{2n+1}\theta d\theta = -\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{2n-i}{n}}{i2^{2n+1-i}}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)^i} - \frac{1}{(1+\cos\theta)^i}\right] + C$$

ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนรายวิชาแคลคูลัส สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ที่ยกกำลังเลขคี่ได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น เป็นอีกวิธีการหนึ่งในการหาแก้ปัญหานั่นเอง

(ขอขอบคุณฝ่ายวิจัยและวิเทศสัมพันธ์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม)

5. บรรณานุกรม

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. 2547. **คอมบินาทอริก.** กรุงเทพฯ : มูลนิธิ สอวน.

สกล คงบุญ. 2544. “การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามในรูปโคเซแคนต์และโคแทนเจนต์” **วารสารมหาวิทยาลัยมหาสารคาม.** 20(1): 86-89 ; พ.ค. – ต.ค., 2544.