ขั้นตอนการทำซ้ำใหม่ของจุดตรึงร่วมในปริภูมิบานาค

The New Iterations of Common Fixed Point in a Banach Space

หทัยกาญจน์ วัฒนทวีกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

อ. วารินชำราบ จ. อุบลราชธานี 34190

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงขั้นตอนการทำซ้ำของจุดตรึงและจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย และการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาค และกล่าวถึงขั้นตอนการทำซ้ำแบบใหม่ ซึ่งเป็นขั้นตอนการทำซ้ำที่ขยายขั้นตอนการทำซ้ำของ Mann, Ishikawa และ Noor

คำสำคัญ : จุดตรึง จุดตรึงร่วม ขั้นตอนการทำซ้ำของจุดตรึง ปริภูมิบานาค

Abstract

This article outlines a study of iterative schemes for non-expansive mappings and asymptotically non-expansive mappings in a Banach space and also studied a new iterative scheme extending the iterative schemes of Mann, Ishikawa, and Noor.

Keywords: fixed point. common fixed point, fixed point iteration, Banach spaces.

1. บทนำ

การแก้ปัญหาในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ ส่วนใหญ่ปัญหาเหล่านั้นมักอยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ซึ่งเราสามารถหาคำตอบของสมการโดยใช้ทฤษฎีจุดตรึง (theory of fixed point) (สมยศ, 2548) แต่บางสมการอาจมีคำตอบหรือไม่มีคำตอบก็ได้ เช่นให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง และ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ โดยที่ $f(x)=x+2$ จะพบว่าเราไม่สามารถหา $v\in\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $f(v)=v$ นั่นคือ f ไม่มีจุดตรึง ต่อมานักคณิตศาสตร์ได้พยายามหาเงื่อนไขหรือสมบัติต่างๆ ที่ทำให้ฟังก์ชันมีจุดตรึง และได้มีนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Stefan Banach ได้ค้นพบทฤษฎีบทเกี่ยวกับการมีจริงของจุดตรึงที่เรียกว่า หลักการหดตัวของบานาค (Banach Contraction Principle) (สมยศ, 2548) กล่าวคือ ถ้าให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกซ์บริบูรณ์ และให้ $T:X\to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว (contraction mapping) โดยที่ $d(Tx,Ty)\le\alpha\, d(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$ และ $\alpha\in[0,1)$ จะได้ว่า T จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น ทฤษฎีบทนี้เป็นทฤษฎีบทที่สามารถประยุกต์ใช้กันแพร่หลายในด้านการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน แต่ผลสรุปของทฤษฎีบทดังกล่าวไม่ครอบคลุมถึงการส่งแบบไม่ขยายบนปริภูมิบานาค

W.A. Kirk (1965) ได้พิสูจน์ว่าทุกการส่งแบบไม่ขยายบนเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ ที่มีขอบเขตของปริภูมิบานาคที่สะท้อน และมีโครงสร้างปกติจะมีจุดตรึงเสมอ จากทฤษฎีบทของ W.A. Kirk จะพบว่าสมบัติโครงสร้างปกติซึ่งเป็นสมบัติทางเรขาคณิตเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย

ในปีเดียวกัน F.E. Browder ได้พิสูจน์ว่า สำหรับทุกเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และมีขอบเขต C ของปริภูมิฮิลเบิร์ต และสำหรับทุกการส่ง $T:C\to C$ ที่เป็นการส่งแบบไม่ขยายจะมีจุดตรึงเสมอ และ D. GÖhde (1965) ได้ศึกษาเพิ่มเติมโดยแทนที่เงื่อนไขปริภูมิฮิลเบิร์ตด้วยปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniformly convex)

ต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้า ซึ่งเป็นการศึกษาการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งที่เป็นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในการหาจุดตรึงของตัวดำเนินการซึ่งก็คือ การสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสำหรับ

ประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง ได้มีการพยายามสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ เพื่อใช้ประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างมากต่อการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในเรื่องของสมการตัวดำเนินการ การแก้ปัญหาอสมการการแปรผัน การหาคำตอบของปัญหาสมดุล ปัญหาที่เหมาะที่สุด ปัญหาค่าต่ำสุด และปัญหาความเป็นไปได้แบบคอนเวกซ์ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค

ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งโดยใช้ขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ นั้นพบว่า ขั้นตอนวิธีทำซ้ำของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Charles Emile Picard เป็นลำดับไม่ลู่เข้า กล่าวคือให้ $x_0 \in X$ และการส่ง $T: X \to X$ โดยที่ $x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0,1,2,\dots$ จะได้ $x_n = T^n x_0$ สำหรับทุก $n \in N$ เป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำที่ทำให้ลำดับไม่ลู่เข้า เช่น ให้ $X = [0,1]$ และการส่ง $T: X \to X$ โดยที่ $Tx = 1 - x$ สำหรับทุก $x \in X$ จะพบว่า T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และมีจุดตรึง $x = \frac{1}{2}$ แต่ถ้าเลือก $x_0 = \frac{1}{3}$ แล้ว $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$ นั่นคือ ลำดับ $\{T^n x_0\}$ ไม่ลู่เข้า ดังนั้นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Picard ไม่สามารถที่จะตอบปัญหาที่สำคัญๆ ในกรณีของการส่งที่เป็นการส่งแบบไม่ขยายได้

นักคณิตศาสตร์พยายามสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ สำหรับการส่งแบบไม่ขยาย เพื่อใช้ประมาณค่าของจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค เช่น W.R. Mann (1953) ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ดังนี้ ให้

$x_1 \in C \subseteq H,$

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n)x_n,\quad n \geq 1 \qquad (1)$$

และเรียกขั้นตอนวิธีทำซ้ำนี้ว่า Mann iteration scheme

S. Ishikawa (1974) ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่ที่เป็นการขยายขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ W.R. Mann สำหรับการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งไม่ขยายในปริภูมิบานาค ดังนี้ ให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ กระชับของปริภูมิบานาค X และการส่งแบบไม่ขยาย $T: C \to C$ ลำดับ $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (1) และ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty,\ \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย T นอกจากนี้ Ishikawa ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่ที่ขยายขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ W.R. Mann ดังนี้ ให้

$x_1 \in C \subseteq X,$

$y_n = b_n T x_n + (1-b_n)x_n,$

$$x_{n+1} = \alpha_n T y_n + (1-\alpha_n)x_n,\quad n \geq 1 \qquad (2)$$

โดยที่ $\{\alpha_n\}$ และ $\{b_n\} \subset [0,1]$ และเรียกขั้นตอนวิธีทำซ้ำนี้ว่า Ishikawa iteration scheme จะพบว่า ถ้า $b_n \equiv 0$ แล้ว ขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (2) จะลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (1) ของ W.R. Mann ต่อมา Senter และ Dotson (1974) ได้ประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายโดยใช้ขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Mann ต่อมา Maiti และ Ghosh (1989), Tan และ Xu (1993) ได้ศึกษาการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายโดยใช้ขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Ishikawa ภายใต้เงื่อนไข *A* กล่าวคือ ถ้ามีฟังก์ชันไม่ลด $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ ซึ่ง $f(0) = 0, f(r) > 0$ สำหรับทุก $r \in (0,\infty)$ ที่ทำให้

$\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$

สำหรับทุก $x \in C$ โดยที่

$d(x, F(T)) = \inf\{\|x - p\| \mid p \in F(T)\}$ และ

$F(T) = \{x \in C \mid x = Tx\}$

ในปัจจุบันปัญหาต่างๆ ทางด้านวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี คอมพิวเตอร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น ปัญหาที่ซับซ้อนต่างๆ เหล่านั้นสามารถแปลงเป็นปัญหาการหาคำตอบของระบบสมการ และอสมการของการส่งแบบต่างๆ ซึ่งปัญหาเหล่านี้ก็คือ ปัญหาของการหาจุดตรึงร่วม (common fixed points) ของการส่งแบบต่างๆ ดังนั้น นักคณิตศาสตร์จึงได้สนใจที่จะศึกษาปัญหาการมีจุดตรึงร่วม และการประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งแบบต่างๆ เพื่อสามารถนำไปประยุกต์ในการตอบคำถามที่ซับซ้อนเหล่านั้น

ต่อไปนี้เป็นงานวิจัยที่นักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและสร้างระเบียบวิธีเพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งแบบต่างๆ

Das และ Debata (1986), Takahashi และ Tamura (1998) ได้ศึกษาและสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย T_1 และ T_2 ในปริภูมิบานาค X ดังนี้ ให้ $x_1 \in C \subseteq X,$

$y_n = b_n T_2 x_n + (1-b_n)x_n,$

$$x_{n+1} = \alpha_n T_1 y_n + (1-\alpha_n)x_n,\qquad n \geq 1$$

โดยที่ $\{\alpha_n\}$ และ $\{b_n\} \subset [0,1]$

ในปีค.ศ. 1972 K. Goebel และ W.A. Kirk ได้ศึกษาการมีอยู่ของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับบนเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขตในปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ S.C. Bose (1978) สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อศึกษาการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ และศึกษาการลู่เข้าอย่างอ่อนในปริภูมิบานาค X และ $T: C \to C$ ดังนี้ ให้

$x_1 \in C \subseteq X,$
$x_{n+1} = T^n x_n, \qquad n \geq 1$

โดยที่การส่ง T มีสมบัติเพิ่มเติมบางประการ และพบว่าการประมาณค่าจุดตรึงด้วยขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Mann iteration scheme และ Ishikawa iteration scheme ไม่สามารถทำได้ในกรณีนี้เนื่องจากการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับมีค่าคงตัวลิปชิตซ์ (Lipshitz constant) ของการส่ง T ที่ได้จาก

$$\|T\|_{Lip} := sup\left\{\frac{\|T_x - T_y\|}{\|x - y\|} \middle| x, y \in dom(T) \text{ และ } x \neq y\right\}$$

ซึ่งมีค่ามากได้ตามต้องการ แต่ขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Mann iteration scheme และ Ishikawa iteration scheme คำนวณได้จาก T เท่านั้น ในขณะที่ T^n จะมีค่าคงตัวลิปชิตซ์ลดลงเมื่อ n มีค่ามากขึ้น

ต่อมาในปีค.ศ. 1991 J. Schu ได้ปรับปรุงขั้นตอนวิธีทำซ้ำใหม่ที่เรียกว่า modified Ishikawa iteration scheme และ modified Mann iteration scheme ตามลำดับ ดังนี้

ให้ $x_1 \in C,$
$y_n = b_n T^n x_n + (1 - b_n) x_n,$
$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n, \qquad n \geq 1$

โดยที่ $\{\alpha_n\}$ และ $\{b_n\} \subset [0,1]$ และ

$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1 - \alpha_n) x_n, \qquad n \geq 1$

โดยที่ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$

ขั้นตอนวิธีทำซ้ำ modified Ishikawa iteration scheme และ modified Mann iteration scheme ของ J. Schu ทำให้เกิดการศึกษาการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับอย่างกว้างขวาง และในปี ค.ศ. 2002 Xu and Noor ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนเพื่อประมาณค่าจุดตรึงสำหรับการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาค X ดังนี้ ให้ $x_1 \in C \subseteq X,$

$z_n = a_n T^n x_n + (1 - a_n) x_n,$
$y_n = b_n T^n x_n + (1 - b_n) x_n,$
$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n, \qquad n \geq 1$

โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}$ และ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ และเรียกขั้นตอนวิธีทำซ้ำนี้ว่า Noor iterative scheme

Cho et al. (2004) ได้ขยายขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอน พร้อมทั้งศึกษาความคลาดเคลื่อนของการลู่เข้าของจุดตรึงแบบเข้ม และแบบอ่อนสำหรับการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาค

ในปีค.ศ. 2005 Suantai ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนแบบใหม่ ซึ่งเป็นการขยายขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Xu และ Noor (2002) และศึกษาการลู่เข้าของจุดตรึงแบบเข้มและแบบอ่อนสำหรับการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาคที่เป็นปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป ในภายหลังได้มีการศึกษาการลู่เข้าของจุดตรึงอย่างแพร่หลายเช่น Nilsrakoo และ Saejung (2006), Plubtieng et al. (2006) และ Fukhar-ud-din และ Khan (2007) เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 2007 Hafiz Fukhar-ud-din และ Abdul Rahim Khan ได้แนะนำระเบียบวิธีการทำซ้ำสามขั้นตอนสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับสามการส่ง และพิสูจน์ว่าลำดับที่สร้างขึ้นนั้นลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของการส่งทั้งสามนั้นภายใต้เงื่อนไขบางประการ

การศึกษาขั้นตอนวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งไม่ขยาย และการส่งไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับอย่างกว้างขวาง ในบทความนี้ขอเสนอการสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่ เพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาค

2. ความรู้พื้นฐาน นิยาม และทฤษฎีบท

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง นิยาม ทฤษฎีบท และความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาค ดังนี้

ให้ X เป็นปริภูมิเมตริก และ C เป็นเซตย่อยของ X จะเรียก C ว่าเป็นเซตปิด ถ้าคอมพลีเมนท์ของ C เป็นเซตเปิด

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ C เป็นเซตย่อยของ X จะกล่าวว่า C เป็นคอนเวกซ์ ถ้า สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ จะได้

$\{z \in X : z = tx + (1 - t)y, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq C$

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของ X การส่ง $T: C \to C$ จะเรียกว่าการส่งไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับบน C ถ้ามีลำดับ

$\{k_n\}$ ของจำนวนจริงซึ่ง $k_n \geq 1$ และ $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ ที่ทำให้

$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n\|x - y\|$

สำหรับทุก $x, y \in C$ และ $n \geq 1$

ถ้า $k_n \equiv 1$ แล้ว T เป็นการส่งไม่ขยาย การส่ง T จะเรียกว่า uniformly L-Lipschitzian ถ้ามีค่าคงที่ $L > 0$ ที่ทำให้

$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$

สำหรับทุก $x, y \in C$ และ $n \geq 1$ เราจะเห็นว่าถ้า T เป็นการส่งไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับแล้ว T เป็น uniformly L-Lipschitzian โดยที่

$L = \sup\{k_n : n \geq 1\}$

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะเรียก X ว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล (Opial's condition) ถ้า x_n ลู่เข้าสู่ x แบบอ่อนขณะที่ $n \to \infty$ และ $x \neq y$ จะได้ว่า

$\lim_{n\to\infty}\sup\|x_n - x\| < \lim_{n\to\infty}\sup\|x_n - y\|$

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ

$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$

จะเรียกนอร์มของ X ว่าเป็นนอร์มที่หาอนุพันธ์ได้แบบเฟรเช (Frechet differentiable) ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in S(X)$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $x, y \in S(X)$

$\lim_{t\to 0}\dfrac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$

ลู่เข้าแบบเอกรูปบน $S(X)$

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า X มีสมบัติคาเดกคลี (Kadec-Klee property) ถ้าทุกๆลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $x_n \rightharpoonup x$ และ $\|x_n\| \to \|x\|$ จะได้ว่า

$\|x_n - x\| \to 0$

ปริภูมิบานาค X เป็นปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniformly convex) ถ้าสำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ แล้ว

$\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้นำเสนอโดย Hafiz Fukhar-ud-din และ Abdul Rahim Khan (2007) ได้แสดงและพิสูจน์ว่าลำดับที่สร้างขึ้นจากระเบียบวิธีการสามขั้นตอนนั้นลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของการส่งทั้งสามนั้นภายใต้เงื่อนไขบางประการ

ทฤษฎีบท 1 (Fukhar-uddin และ Khan, 2007) ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป X และ $T_i: C \to C, i = 1,2,3$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่สร้างจากระเบียบวิธี สามขั้นตอนดังนี้ ให้ $x_1 \in C$,

$z_n = \alpha_n^{(3)}x_n + \beta_n^{(3)}T_3x_n + \gamma_n^{(3)}u_n^{(3)}$,

$y_n = \alpha_n^{(2)}x_n + \beta_n^{(2)}T_2x_n + \gamma_n^{(2)}u_n^{(2)}$

$x_{n+1} = \alpha_n^{(1)}x_n + \beta_n^{(1)}T_1x_n + \gamma_n^{(1)}u_n^{(1)}$

สมมติว่า $\beta_n^{(i)} \in [\delta, 1-\delta]$ สำหรับบาง $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(i)} < \infty$

ถ้าเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

(1) X มีสมบัติโอเปียล

(2) X มีนอร์มที่หาอนุพันธ์ได้แบบเฟรเช

(3) X^* มีสมบัติคาเดกคลี

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของการส่ง $T_i (i = 1,2,3)$

3. ขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนเพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาคแบบเอกรูป

ให้ X เป็นปริภูมินอร์มและ C เป็นเซตย่อย คอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของ X และให้ $T_i: C \to C, i = 1,2,3$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ และ F เป็นเซตของจุดตรึงร่วม (common fixed point) ของ T_1, T_2 และ T_3 นั่นคือ

$F = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3)$

โดยที่

$F(T_i) = \{x \in C : T_i x = x\}, i = 1,2,3$

ทฤษฎีบท 2 (Suantai, 2005) ให้ X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ไม่เป็นเซตว่างของ X ให้ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ และต่อเนื่องบริบูรณ์ซึ่งลำดับ $\{k_n\} \geq 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ให้ลำดับ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน

$[0,1]$ โดยที่ $b_n + c_n \in [0,1]$, $\alpha_n + \beta_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$

และ

(2) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) < 1$

ให้ $x_1 \in C$, และลำดับ $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ กำหนดโดย

$$z_n = a_n T^n x_n + (1 - a_n)x_n,$$
$$y_n = b_n T^n z_n + c_n T^n x_n + (1 - b_n - c_n)x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n + (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n, \quad n \geq 1$$

จะได้ว่า $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของ T

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้ขยายขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนของทฤษฎีบท 2 ในการศึกษาการลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป

ทฤษฎีบท 3 (Nilsrakoo และ Saejung, 2006) ให้ X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ไม่เป็นเซตว่างของ X ให้ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับซึ่ง

ลำดับ $\{k_n\} \geq 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ให้ $x_1 \in C$, และลำดับ $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ กำหนดโดย

$$z_n = a_n T^n x_n + (1 - a_n)x_n,$$
$$y_n = b_n T^n z_n + c_n T^n x_n + (1 - b_n - c_n)x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n + \gamma_n T^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n, \quad n \geq 1$$

โดยที่ $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{b_n + c_n\},\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ และ $\{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1$ และ

(2) $\limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$

ถ้าการส่ง T สอดคล้องกับเงื่อนไข A แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของ T

ในปี 2009 Inprasit และ Wattanataweekul ได้ขยายขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนของทฤษฎีบท 2 และทฤษฎีบท 3 เพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งสามการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป ซึ่งมีขั้นตอนวิธีทำซ้ำ ดังนี้

ให้ $x_1 \in C$,

$$z_n = a_n T_1^n x_n + (1 - a_n)x_n,$$
$$y_n = b_n T_2^n z_n + c_n T_1^n x_n + (1 - b_n - c_n)x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T_3^n y_n + \beta_n T_2^n z_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n, \qquad (3)$$

โดยที่ $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{b_n + c_n\},\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \in [0,1]$ จากขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (3) และเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. (1.1) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1$,

   (1.2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} (b_n + c_n) < 1$ และ

   (1.3) $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1$

หรือ

2. $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n, \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1$

จะได้ว่า $\{x_n\},\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงร่วมของ T_1, T_2 และ T_3

ข้อสังเกต ขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (3) จะพบว่า

1. ถ้า $\gamma_n \equiv 0$ และ $T := T_i, i = 1,2,3$ แล้วขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (3) จะลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า modified Noor iterative scheme สร้างโดย Suantai (2005)
2. ถ้า $c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ และ $T := T_i, i = 1,2,3$ แล้วขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (3) จะลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า Noor iterative scheme สร้างโดย Xu และ Noor (2002)
3. ถ้า $a_n = c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ และ $T := T_i, i = 1,2,3$ แล้วขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (3) จะลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า modified Ishikawa iterative scheme
4. ถ้า $a_n = b_n = c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ และ $T := T_3$ แล้วขั้นตอนวิธีทำซ้ำ (3) จะลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า modified Mann iterative scheme

4. สรุปและข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากมีขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อหาจุดตรึงร่วมสองและสามขั้นตอนอยู่หลายวิธี สิ่งที่น่าสนใจศึกษาเพิ่มเติมก็คือน่าจะมีการเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าว่าวิธีใดดีกว่าอีกวิธีหนึ่ง

2. ควรขยายแนวคิดไปสู่การหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบต่างๆ รวมทั้งการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่เป็นวงศ์จำกัดและไม่จำกัด

3. ควรจะมีการนำไปประยุกต์ใช้ โดยสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อช่วยหาคำตอบของสมการ และระบบสมการต่างๆ ที่อาศัยทฤษฎีบทดังกล่าว

5. บรรณานุกรม

สมยศ พลับเที่ยง. 2548. **ทฤษฎีจุดตรึงและการประยุกต์** พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

Bose S.C. 1978. "Weak convergence to the fixed point of an asymptotically nonexpansive map" **Proc. Amer. Math**. Soc. 68:305-308.

Browder F.E. 1965. "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space" **Proc. Nat. Acad**. Sci. U.A.S. 54:1041-1044.

Cho Y.J., Zhou H.Y. and Guo G. 2004. "Weak and strong convergence theorems for three-step iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings" **Comput. Math. Appl**. 47:707-717.

Das G. and Debata J.P. 1986. "Fixed points of quasi-nonexpansive mappings" **J. Pure Appl. Math**. 17:1263-1269.

Fukhar-ud-din, H. and Khan A. R. 2007. "Approximating common fixed points of nonexpansive maps in uniformly convex Banach spaces" **Comput. Math.** Appl. 328:821-829.

Goebel K. and Kirk W.A. 1972. "A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings" **Proc. Amer. Math**. Soc. 35:171-174.

Inprasit U. and Wattanataweekul H. 2009. "Common fixed points of three-step iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces" **JP Journal of Fixed Point Theory and Applications.** 4(2):81-104.

Ishikawa S. 1974. "Fixed point by a new iteration" **Proc. Amer. Math**. Soc. 44:147-150.

GÖhde D. 1965. "Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung" **Math. Nachr. 30**:251-258.

Kirk W.A. 1965. "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances." **Amer. Math. Monthly** 72:1004-1006.

Nilsrakoo W. and Saejung S. 2006. "A new three-step fixed point iteration scheme for asymptotically nonexpansive mappings." **Appl. Math. and Comput.** 181:1026-1034.

Maiti M. and Gosh M.K. 1989. "Approximating fixed points by Ishikawa iterates." **Bull. Austral. Math. Soc.** 40:113-117.

Mann W.R. 1953. "Mean value methods in iteration." **Proc. Amer. Math. Soc.** 4:506-510.

Schu J. 1991."Iterative construction of fixed pointed of asymptotically nonexpansive mappings." **J. Math. Anal. Appl.** 158:407-413.

Senter H.F. and Dotson W.G. 1974. "Approximating fixed points of nonexpansive mappings" **Proc. Amer. Math.** Soc. 44:375-380.

Suantai S. 2005. "Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings" **J. Math. Anal. Appl**. 311:506-517.

Takahashi W. and Tamura T. 1998. **"Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings" J. Convex Analysis**. 5(1):45-58.

Tan K.K. and Xu H.K. 1993. “Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process” **J. Math. Anal. Appl.** 178:301-308.

Xu B.L. and Noor Aslam M. 2002. “Fixed-point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces” **J. Math. Anal. Appl.** 267:444-453.