

## การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงทวินามลบ

### Statistical Hypotheses Testing under Negative Binomial Distribution

บุญยสิทธิ์ วรจันทร์<sup>1</sup> และสาชชล สิ้นสมบูรณ์ทอง<sup>2</sup>

Boonyasit Warachan and Saichon Sinsomboonthong

สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

#### บทคัดย่อ

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยทำการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ (r) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05 ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับค่า  $\theta_1$  ใดๆ ที่  $\theta_0 = 0.5$  ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ( $\gamma$ ) จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อยๆ ส่วนค่าวิกฤต ( $c_1$ ) และกำลังของการทดสอบ ( $1 - \beta$ ) จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_0$  ให้ผลเหมือนกับการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดข้างต้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq \theta_1$  หรือ  $\theta \geq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$  เมื่อ  $\theta_1 = 0.25, \theta_2 = 0.75$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ( $\gamma_1, \gamma_2$ ) จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_1$  หรือ  $\theta > \theta_2$  เมื่อ  $\theta_1 = 0.25, \theta_2 = 0.75$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  และ  $r = 10$  จะไม่สามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  เมื่อ  $\theta_0 = 0.25$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  ถ้า  $r = 3$  จะสามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้

คำสำคัญ : การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด, การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย, การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการแจกแจงทวินามลบ

### Abstract

In this study, the most powerful test, uniformly most powerful test and uniformly most powerful unbiased test were investigated under Negative binomial distribution with  $r$  of 1, 2, 3, 4 and 5, and the test size of 0.05. The result of the most powerful test for  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$  showed that at  $\alpha = 0.05$  for any  $\theta_1$  and  $\theta_0 = 0.5$  when  $r$  increased from 1 to 5,  $\gamma$  showed an certain decrease and increase value, while  $c_1$  and  $1 - \beta$  had an increase. In the uniformly most powerful test for  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta < \theta_0$  showed that the results same as the most powerful test above. In the uniformly most powerful test for  $H_0 : \theta \leq \theta_1$  or  $\theta \geq \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ ,  $\theta_1 = 0.25$  and  $\theta_2 = 0.75$ , for  $\alpha = 0.05$  if  $r$  had an increase from 1 to 5 then  $\gamma_1, \gamma_2$  showed an uncertain value, while  $c_1$  and  $c_2$  increased. The result of the uniformly most powerful unbiased test for  $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  versus  $H_1 : \theta < \theta_1$  or  $\theta > \theta_2$ ,  $\theta_1 = 0.25$  and  $\theta_2 = 0.75$  showed that  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  could not be found when  $\alpha = 0.05$  and  $r = 10$ . However, when there was an increase of  $r$  from 20 to 50,  $\gamma_1, \gamma_2$  had uncertain value, and there was an increase for  $c_1$  and  $c_2$ . In addition, the result of the uniformly most powerful unbiased test for  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ ,  $\theta_0 = 0.25$  showed that  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  could be found when  $\alpha = 0.05$  with  $r = 3$ .

**Keywords :** Most powerful test, Uniformly most powerful test, Uniformly most powerful unbiased test and Negative binomial distribution

### 1. บทนำ

ในเรื่องของการอนุมานเชิงสถิตินั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ๆ คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จุดประสงค์ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติคือ หาข้อสรุปเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่ผู้วิจัยสนใจศึกษา ในการดำเนินการทดสอบเมื่อกำหนดขนาดของการทดสอบ (size of the test)  $\alpha$  ให้ และขนาดตัวอย่าง  $n$  คงที่ ผู้วิจัยจะหาการทดสอบ (test) ที่มีกำลังของการทดสอบ (power of the test) สูงที่สุด อย่างไรก็ตาม การทดสอบมีชื่อเรียกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการตั้งสมมติฐานเชิงสถิติที่ต้องการทดสอบ [1] มีผู้วิจัยหาการทดสอบแบบต่าง ๆ เช่น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่

เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายภายใต้การแจกแจงทวินาม [2] การแจกแจงปัวส์ซง [3] และการแจกแจงเบอร์นูลลี [4] ในบทความนี้ผู้วิจัยมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ โดยการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลาย ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ จากการศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินาม โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = 0.7$  เทียบกับ  $H_1 : \theta = 0.3$  ขนาดตัวอย่างที่ใช้  $n = 10, 20, 30, 40$  และ  $50$  พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c(\gamma)$  จะมีค่าลดลงจนถึง  $n = 30$  หลังจากนั้น ค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต  $c$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c(\gamma)$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่  $n = 50$  และค่าวิกฤต  $c$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq 0.3$  เทียบกับ  $H_1 : \theta > 0.3$  พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c(\gamma)$  จะมีค่าลดลงจนถึง  $n = 30$  หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต  $c$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c(\gamma)$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่  $n = 50$  และค่าวิกฤต  $c$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq 0.3$  หรือ  $\theta \geq 0.7$  เทียบกับ  $H_1 : 0.3 < \theta < 0.7$  พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c(\gamma)$  และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่  $n = 10, 20, 30$  จะไม่สามารถหาค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c(\gamma)$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่  $n = 50$  และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่  $n = 10$  จะไม่สามารถหาค่าได้ สำหรับการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : 0.3 \leq \theta \leq 0.7$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < 0.3$  หรือ  $\theta > 0.7$  เมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01, 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c_1(\gamma_1)$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ  $X = c_2(\gamma_2)$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = 0.3$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq 0.3$  เมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง

$n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c_1(\gamma_1)$  และ  $X = c_2(\gamma_2)$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $X = c_1(\gamma_1)$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ  $X = c_2(\gamma_2)$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่  $n = 10$  จะไม่สามารถหาค่าได้ [2]

การศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้าน ภายใต้การแจกแจงปัวส์ซง โดยทำการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq 0.2$  หรือ  $\theta \geq 0.75$  เทียบกับ  $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$  ขนาดตัวอย่างที่ใช้  $n = 20, 30, 40$  และ  $50$  พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า  $\gamma_1$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่า  $\gamma_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยตลอด ยกเว้นที่  $n = 20$  จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า  $\gamma_1$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ  $\gamma_2$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่  $n = 50$  จะไม่สามารถหาค่าได้ ในการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.3$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < 0.25$  หรือ  $\theta > 0.3$  เมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า  $\gamma_1$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ  $\gamma_2$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่  $n = 20$  และ  $50$  จะไม่สามารถหาค่าได้ และการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = 0.5$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq 0.5$  เมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.01$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า  $\gamma_1$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า  $\gamma_2$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และขนาดตัวอย่าง  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เช่นเดียวกัน [3]

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี โดยทำการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ  $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$  และ  $50$  และขนาดของการทดสอบเท่ากับ  $0.05$  ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_0$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับค่า

$n$  ใดๆ ถ้า  $\theta_0$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า  $\gamma$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่าวิกฤต  $c_1$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq \theta_1$  หรือ  $\theta \geq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  ถ้า  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า  $\gamma_1, \gamma_2$  มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ค่าวิกฤต  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_1$  หรือ  $\theta > \theta_2$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  ค่า  $n = 5$  และ 10 จะไม่สามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ถ้า  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า  $\gamma_1, \gamma_2$  มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ค่าวิกฤต  $c_1$  และ  $c_2$  มีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  ค่า  $n = 5$  และ 10 จะไม่สามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้ ถ้า  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่าวิกฤต  $\gamma_1, \gamma_2$  มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ค่าวิกฤต  $c_1$  และ  $c_2$  มีค่าเพิ่มขึ้น [4]

ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาถึงการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลาย

## 2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลาย โดยมีวิธีในการดำเนินงานดังนี้

### 1) สมมติฐานที่สนใจทดสอบ

- 1.1  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$
- 1.2  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_0$
- 1.3  $H_0 : \theta \leq \theta_1$  หรือ  $\theta \geq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$
- 1.4  $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_1$  หรือ  $\theta > \theta_2$
- 1.5  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq \theta_0$

### 2) จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จและขนาดการทดสอบ

สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ จะพิจารณาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ ( $r$ ) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

3) เขียนโปรแกรม

เขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB version 7.6 ช่วยในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลาย

3. ผลการวิจัย

3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้  $X_1, \dots, X_n$  เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x; r, \theta) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{x-r} & ; \quad x = r, r+1, r+2, \dots \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

โดย  $X$  คือ จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จครบ  $r$  ครั้ง และ  $\theta$  คือ ความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จของการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง

3.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

$$\text{ในที่นี้ } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; r_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \binom{x_i-1}{r_i-1} \theta^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\left[ \frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i} \left( \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} < c$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left( \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < \ln c \left[ \frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

แต่  $\theta_1 < \theta_0$  จะได้  $1 - \theta_0 < 1 - \theta_1$  และ  $\ln\left(\frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_1}\right) < 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\ln c \left[ \frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln\left(\frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_1}\right)} = c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด  $\alpha$  ในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า  $X_i$  มีการแจกแจงแบบทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น  $r_i$  และ  $\theta$  แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$  จะมีการแจกแจงแบบทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น  $\sum_{i=1}^n r_i$  และ  $\theta$

ดังนั้น  $c_1$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้  $P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] \leq \alpha$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

$$\text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$$

$$\text{และ} \quad \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i | \theta = \theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่  $r=1$  ขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ  $\theta_0 = 0.50$  และ  $\theta_1 = 0.25$  จะได้ว่าสถิติการทดสอบ  $\sum_{i=1}^n X_i$  มีการแจกแจงแบบทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น  $\sum_{i=1}^n r_i$  และ  $\theta$  โดยเราสามารถหาค่า  $c_1$  และ  $\gamma$  ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 \mid \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 \mid \theta = 0.50\right]} \quad \dots (1)$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 \mid \theta = 0.25\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 \mid \theta = 0.25\right] \quad \dots (2)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (1) พบว่า  $c_1 = 4$  โดยที่  $P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 4 \mid \theta = 0.50\right] = 0.03125$ ,  $P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 4 \mid \theta = 0.50\right] = 0.03125$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 4 \mid \theta = 0.25\right] = 0.2373046875, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 4 \mid \theta = 0.25\right] = 0.0791015625$$

แทนค่าลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.03125}{0.03125} = 0.6$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad 1 - \beta &= 0.2373046875 + 0.6(0.0791015625) \\ &= 0.284765625 \end{aligned}$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด  $\alpha = 0.05$  ในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = 0.50$  เทียบกับ  $H_1 : \theta = 0.25$ ,  $\theta_1 < \theta_0$  เมื่อ  $r=1$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 4 \\ 0.60 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 4 \end{cases}$$



ตารางที่ 3.1 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก  $\gamma$  ค่าวิกฤต  $c_1$  และกำลังของการทดสอบ  $1-\beta$  สำหรับ การทดสอบสมมติฐาน  $H_0:\theta=\theta_0$  เทียบกับ  $H_1:\theta=\theta_1, \theta_1<\theta_0$

$\alpha$	r	$\theta_0$	$\theta_1$	$\gamma$	$c_1$	$1-\beta$
0.05	1	0.5	0.1	0.6000000000	4	0.6298560000
			0.2	0.6000000000	4	0.3768320000
			0.3	0.6000000000	4	0.2112880000
			0.4	0.6000000000	4	0.1088640000
	2	0.5	0.1	0.5428571429	6	0.8332994880
			0.2	0.5428571429	6	0.5431623680
			0.3	0.5428571429	6	0.2955342880
			0.4	0.5428571429	6	0.1347425280
	3	0.5	0.1	0.7866666667	8	0.9256766884
			0.2	0.7866666667	8	0.6649146245
			0.3	0.7866666667	8	0.3678404222
			0.4	0.7866666667	8	0.1569701929
	4	0.5	0.1	0.1436363636	9	0.9670635278
			0.2	0.1436363636	9	0.7541103578
			0.3	0.1436363636	9	0.4309345550
			0.4	0.1436363636	9	0.1767321516
5	0.5	0.1	0.5566300366	11	0.9853803346	
		0.2	0.5566300366	11	0.8191306651	
		0.3	0.5566300366	11	0.4864117803	
		0.4	0.5566300366	11	0.1947942724	

จากตารางที่ 3.1 จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับค่า r ใดๆ ที่  $\theta_0 = 0.5$  ถ้า  $\theta_1$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้ว  $\gamma$  และ  $c_1$  จะมีค่าคงที่ แต่  $1-\beta$  จะมีค่าลดลง และเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับค่า  $\theta_1$  ใดๆ ที่  $\theta_0 = 0.5$  ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว  $\gamma$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นสลับกันไปเรื่อยๆ ส่วน  $c_1$  และ  $1-\beta$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น

### 3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่างๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อยๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่

ดีมาก กล่าวคือ การทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้อุททดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

3.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เทียบกับ } H_1 : \theta < \theta_0$$

เหมือนกับในหัวข้อที่ 3.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_0$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

3.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ หรือ } \theta \geq \theta_2 \text{ เทียบกับ } H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$$

ในที่นี้  $f(x; \theta) = \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{x-r} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r \binom{x-1}{r-1} e^{x \ln(1-\theta)}$

เปรียบเทียบกับ  $f(x; \theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$

โดยที่  $c(\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r, \quad h(x) = \binom{x-1}{r-1}$

$p(\theta) = \ln(1-\theta), \quad q(x) = x$

ดังนั้น  $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n q(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$  เป็นสถิติที่พอเพียงของ  $\theta$

การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด  $\alpha$  ในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq \theta_1$  หรือ  $\theta \geq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i=1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \end{cases}$$

โดยที่  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

จะได้

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 \mid \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 \mid \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 \mid \theta = \theta_1\right] = \alpha$$

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 \mid \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 \mid \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 \mid \theta = \theta_2\right] = \alpha$$

ในกรณีนี้  $r = 2$  ขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ

$\theta_1 = 0.25$  และ  $\theta_2 = 0.75$  จะได้ว่าสถิติการทดสอบ  $\sum_{i=1}^n X_i$  มีการแจกแจงทวินามลบที่มี

พารามิเตอร์เป็น  $\sum_{i=1}^n r_i$  และ  $\theta$  โดยเราสามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้จากสมการ

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 \mid \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 \mid \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 \mid \theta = \theta_1\right] = \alpha \quad \dots (3)$$

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 \mid \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 \mid \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 \mid \theta = \theta_2\right] = \alpha \quad \dots (4)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (3) และ (4) พบว่า  $c_1 = 1$  และ  $c_2 = 2$  โดยที่

$$P\left[1 < \sum_{i=1}^n X_i < 2 \mid \theta = 0.25\right] = 0, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 \mid \theta = 0.25\right] = 0.09375,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 \mid \theta = 0.25\right] = 0.10546875, \quad P\left[1 < \sum_{i=1}^n X_i < 2 \mid \theta = 0.75\right] = 0,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 \mid \theta = 0.75\right] = 0.28125, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 \mid \theta = 0.75\right] = 0.10546875$$

แทนค่าลงในสมการ (3) และ (4) จะได้

$$0.09375\gamma_1 + 0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \dots (5)$$

$$0.28125\gamma_1 + 0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \dots (6)$$

จะได้  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.4740740741$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด  $\alpha$  ในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq 0.25$  หรือ  $\theta \geq 0.75$  เทียบกับ  $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.4740740741 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 2 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.2 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก  $\gamma_1, \gamma_2$  และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  สำหรับการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta \leq 0.25$  หรือ  $\theta \geq 0.75$  เทียบกับ  $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$

$\alpha$	r	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$c_1$	$c_2$
0.05	1	0.2666666667	0	1	2
	2	0	0.4740740741	1	2
	2	0.4740740741	0	2	3
	3	0.7585185185	0	3	4
	4	0.0511342593	0.0973985891	3	5
	5	0.2404188713	0.4274113267	4	6

จากตารางที่ 3.2 จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น

### 3.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลาย

#### (Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

3.3.1 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_1$  หรือ  $\theta > \theta_2$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i=1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \\ & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \end{aligned}$$

ในกรณีที่  $r = 2$  ขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ  $\theta_1 = 0.25$  และ  $\theta_2 = 0.75$  จะได้ว่าสถิติการทดสอบ  $\sum_{i=1}^n X_i$  มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น  $\sum_{i=1}^n r_i$  และ  $\theta$  โดยเราสามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \quad \dots(7)$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \quad \dots(8)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (7) และ (8) พบว่า  $c_1 = 1$  และ  $c_2 = 17$  โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 1 | \theta = 0.25\right] = 0, P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 17 | \theta = 0.25\right] = 0.0310074056,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 | \theta = 0.25\right] = 0.0937500000, P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 17 | \theta = 0.25\right] = 0.0084565652,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 1 | \theta = 0.75\right] = 0, P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 17 | \theta = 0.75\right] = 0.0000000002,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 | \theta = 0.75\right] = 0.2812500000, P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 17 | \theta = 0.75\right] = 0.0000000006,$$

แทนค่าลงในสมการ (7) และ (8) จะได้

$$0.0937500000\gamma_1 + 0.0084565652\gamma_2 = 0.0189925944 \quad \dots (9)$$

$$0.2812500000\gamma_1 + 0.0000000006\gamma_2 = 0.0499999998 \quad \dots (10)$$

จะได้  $\gamma_1 = 0.1777777765, \gamma_2 = 0.2750440381$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายที่มีขนาด  $\alpha = 0.05$  ในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.75$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < 0.25$  หรือ  $\theta > 0.75$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 17 \\ 0.1777777765 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.2750440381 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 17 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 17 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.3 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก  $\gamma_1, \gamma_2$  และค่าวิกฤต  $c_1, c_2$  สำหรับการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.75$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < 0.25$  หรือ  $\theta > 0.75$

$\alpha$	r	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$c_1$	$c_2$
0.05	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.7441404008	0.1842836997	2	87
	30	0.0186838107	0.4244293898	5	123
	40	0.3670394774	0.5795329060	7	158
	50	0.9150615627	0.3152571418	9	192

จากตารางที่ 3.3 จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  และ  $r = 10$  จะไม่สามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยที่  $c_1$  มีค่าน้อยกว่า  $c_2$  ค่อนข้างมาก

### 3.3.2 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i=1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{และ } E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0\right] &= \alpha E\left[\sum_{i=1}^n X_i | \theta = \theta_0\right] \\ &= n\theta_0\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = \alpha \end{aligned}$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\begin{aligned} & \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=0}^{c_1-1} \binom{r+\sum_{i=1}^n X_i-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} + \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=c_2+1}^{\infty} \binom{r+\sum_{i=1}^n X_i-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} \\ & + \sum_{i=1}^2 \gamma_i \binom{r+\sum_{i=1}^n X_i-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} = \alpha \quad \dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad & \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \\ & + c_1 \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + c_2 \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = n\theta_0 \alpha \end{aligned}$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\begin{aligned} & \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=0}^{c_1-1} \left[ \binom{r+\sum_{i=1}^n X_i-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] + \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=c_2+1}^{\infty} \left[ \binom{r+\sum_{i=1}^n X_i-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \\ & + \sum_{i=1}^2 c_i \gamma_i \binom{r+\sum_{i=1}^n X_i-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} = n\theta_0 \alpha \quad \dots (12) \end{aligned}$$

ในกรณีที่  $r = 3$  ขนาดของการทดสอบ  $\alpha = 0.05$  และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ

$\theta = 0.25$  จะได้ว่าสถิติการทดสอบ  $\sum_{i=1}^n X_i$  มีการแจกแจงแบบทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น  $\sum_{i=1}^n r_i$

และ  $\theta$  โดยเราสามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้จากสมการ

$$\begin{aligned} & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = \alpha \quad \dots (13) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] + c_1 \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + c_2 \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = n\theta_0 \alpha \quad \dots(14)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า  $c_1 = 2$  และ  $c_2 = 9$  โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.25\right] = 0.0156250000, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0000527741,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.25\right] = 0.0351562500, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0000150429,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.25\right] = 0.0000000000, \quad \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0028216622,$$

$$c_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.25\right] = 0.0351562500, \quad c_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0007371080$$

แทนค่าลงในสมการ (13) และ (14) จะได้

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0000150429\gamma_2 = 0.0343222259 \quad \dots (15)$$

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0007371030\gamma_2 = 0.0346783378 \quad \dots (16)$$

จะได้  $\gamma_1 = 0.9760656186$ ,  $\gamma_2 = 0.4931886847$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายที่มีขนาด  $\alpha = 0.05$  ในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = 0.25$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq 0.25$  คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 49 \\ 0.9760656186 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.4931886847 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 49 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 49 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.4 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  และค่าวิกฤต  $c_1$ ,  $c_2$  สำหรับการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = 0.25$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq 0.25$

$\alpha$	r	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$c_1$	$c_2$
0.05	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.9760656186	0.4931886847	1	49
	4	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้



จากตารางที่ 3.4 จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  ถ้า  $r = 3$  จะสามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้ โดยที่  $c_1$  มีค่าน้อยกว่า  $c_2$  ค่อนข้างมาก

#### 4. สรุปผลการวิจัย

1) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ

$H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับค่า  $r$  ใดๆ ที่  $\theta_0 = 0.5$  ถ้า  $\theta_1$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้ว  $\gamma$  และ  $c_1$  จะมีค่าคงที่ แต่  $1 - \beta$  จะมีค่าลดลง และเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับค่า  $\theta_1$  ใดๆ ที่  $\theta_0 = 0.5$  ถ้า  $r$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว  $\gamma$  จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นสลับกันไปเรื่อยๆ ส่วน  $c_1$  และ  $1 - \beta$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น

2) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \theta \leq \theta_1$  หรือ  $\theta \geq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$  เมื่อ  $\theta_1 = 0.25, \theta_2 = 0.75$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  สำหรับ  $r$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น

3) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน  $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  เทียบกับ  $H_1 : \theta < \theta_1$  หรือ  $\theta > \theta_2$  เมื่อ  $\theta_1 = 0.25, \theta_2 = 0.75$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  และ  $r = 10$  จะไม่สามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้ ถ้า  $r$  มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว  $\gamma_1, \gamma_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน  $c_1$  และ  $c_2$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยที่  $c_1$  มีค่าน้อยกว่า  $c_2$

4) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน  $H_0 : \theta = \theta_0$  เทียบกับ  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  เมื่อ  $\theta_0 = 0.25$  จะพบว่าเมื่อ  $\alpha = 0.05$  ถ้า  $r = 3$  จะสามารถหาค่า  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  ได้ โดยที่  $c_1$  มีค่าน้อยกว่า  $c_2$

#### กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเรื่องนี้ได้รับทุนจากคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัคร์ นักศึกษาปริญญาโท ชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

### เอกสารอ้างอิง

- [1] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., 1974. Introduction to the Theory of Statistics. 3<sup>rd</sup> ed. Auckland : McGraw Hill.
- [2] บรรทม สุระพร. 2541. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม. *วารสารพัฒนบริหารศาสตร์*, 38(3), 78-86. [Buntoom Suraporn, 1998. Statistical hypotheses testing under Binomial distribution. *NIDA Journal*, 38(3), 78-86. (in Thai)]
- [3] รุจิเรข ดีเสียง. 2541. การทดสอบสมมติฐานสองด้านเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง. *วารสารพัฒนบริหารศาสตร์*, 38(2), 125-132. [Rujirek Deesaeng, 1998. Statistical hypotheses testing under Poisson distribution. *NIDA Journal*, 38(2), 125-132. (in Thai)]
- [4] สายชล สิ้นสมบูรณ์ทอง. 2554. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี. *วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง*, 20(2), 72-93. [Saichon Sinsomboonthong, 2011. Statistical hypotheses testing under Bernoulli distribution. *Journal of Ladkrabang Sciences*, 20(2), 72-93. (in Thai)]