



ผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดต่อระยะแอนตัว

และความเค้นของแผ่นบาง

Effects of Reaction Forces at Clamped Edge on Deflection and Stress of Thin Plate

จรัสศักดิ์ ปัญญา* และ ธงชัย ฟองสมุทร

Jirasak Panya and Thongchai Fongsamootr

E-mail : j_panya@yahoo.co.th*

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

239 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดต่อระยะแอนตัวและการกระจายความเค้นของแผ่นบาง โดยพิจารณาหาสมการระยะแอนตัวและความเค้นที่เกิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย แล้วคำนวณค่าระยะแอนตัวและความเค้นที่ได้จากสมการดังกล่าวเทียบกับผลการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai โดยเงื่อนไขการรองรับของแผ่นบางทั้งสองกรณี คือ ขอบสองด้านรองรับแบบหนีบยึดส่วนขอบอีกสองด้านรองรับแบบธรรมดา เปลี่ยนค่าตัวแปรต่างๆ ดังนี้ เปลี่ยนอัตราส่วนของด้าน b/a ทั้งหมด 14 อัตราส่วน และเปลี่ยนภาระที่กระทำกับแผ่นบางทั้งหมด 5 ขนาด จากผลการวิเคราะห์ พบว่า ระยะแอนตัวที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าที่คำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai ทุกๆอัตราส่วน b/a ในส่วนผลของค่าความเค้น พบว่า กรณีที่อัตราส่วน b/a น้อยกว่า 0.8 ค่าความเค้นที่คำนวณได้จากสมการที่คิดขึ้นมาใหม่จะมีค่าสูงกว่าที่คำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai โดยมีความแตกต่างมากที่สุด 6.946 เปอร์เซ็นต์ แต่เมื่ออัตราส่วน b/a ตั้งแต่ 0.8 ขึ้นไป ค่าความเค้นที่คำนวณได้จะเริ่มมีค่าน้อยกว่าที่คำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai และค่าความเค้นเริ่มคงที่เมื่ออัตราส่วน b/a มีค่ามากกว่า 2.5 และยังคงพบอีกว่า เมื่อเพิ่มภาระที่กระทำกับแผ่นบางมากขึ้นระยะแอนตัวของแผ่นบางก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย

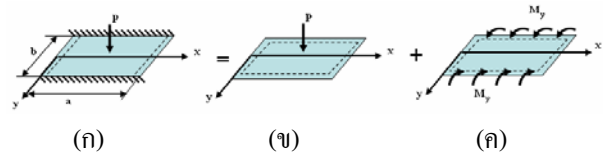
ABSTRACT

The objective of this research is to study the effects of reaction forces of clamped edges on the deflection and stress distribution in the thin plate. The deflection and stress equations that include the effect of the reaction forces of the clamped edges, were created. The calculation results of deflection and stress of the thin plate were compared with the results calculated by Lévy – Nádai method. In both cases the boundary conditions of the thin plate were two clamped edges and other two was simply supported edges. Two parameters considered here were aspect ratio (b/a) and applied forces. 14 aspect ratios are studies. The applied forces were varied for 5 values. The results showed that the analyses deflection result were less than the results from Lévy – Nádai in every aspect ratio. And the stress calculated by the new equation were more than the results from Lévy – Nádai for the cases that the aspect ratio was less than 0.8 with 6.946 % maximum difference. Otherwise, the calculated results will be less than the Lévy – Nádai results and were constant after aspect ratio greater

than 2.5. Finally, the results showed that with increases of applied forces, the deflection of the thin plate would be increases.

1. บทนำ

ปัจจุบันแผ่นบางได้ถูกนำมาใช้งานทางวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย ตัวอย่างเช่น แผ่นป้ายโฆษณา แผ่นปูพื้นสะพาน แผ่นประกอบประตูน้ำ เป็นต้น ซึ่งในการออกแบบแผ่นบางโดยทั่วไปจะคำนวณหาค่าระยะแอ่นตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบางจากสมการโดยวิธีของ Lévy – Nádai ซึ่งในกรณีที่แผ่นบางรองรับที่ขอบสองด้านตรงกันข้ามแบบหนีบยึด ส่วนขอบสองด้านที่เหลือรองรับแบบธรรมดา ดังรูปที่ 1 (ก) สมการระยะแอ่นตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบางจะพิจารณาจากผลการทับซ้อนของแผ่นบางสองแผ่น คือ (1) แผ่นบางรองรับแบบธรรมดาทุกด้านถูกกระทำด้วยภาระกระจายสม่ำเสมอ (p) ทั้งทั้งแผ่นบางดังรูปที่ 1 (ข) และ (2) แผ่นบางรองรับแบบธรรมดาทุกด้านถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด (M_y) ตลอดความยาวขอบของแผ่นบางดังรูปที่ 1 (ค) ซึ่งจะเห็นว่าไม่ได้พิจารณาผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย ซึ่งอาจทำให้ค่าระยะแอ่นตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบางมีความคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง และจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง[1,2,3,4,5] พบว่า ยังไม่มีงานวิจัยที่ศึกษาผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดที่มีต่อระยะแอ่นตัวและความเค้นของแผ่นบาง ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงจะทำการศึกษาผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดต่อระยะแอ่นตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบาง และเปรียบเทียบระยะแอ่นตัวและความเค้นที่ได้จากการคำนวณที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย เทียบกับการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai เพื่อนำผลที่ได้จากการวิจัยไปใช้เป็นข้อมูลในการออกแบบแผ่นบางในงานทางวิศวกรรมต่อไป



รูปที่ 1 การทับซ้อนของแผ่นบางที่ไม่ได้พิจารณาผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้มีขอบเขตในการศึกษา คือ แผ่นบางทำจากเหล็กที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น เท่ากับ 207 GPa และมีค่าอัตราส่วนปัวซอง เท่ากับ 0.3 มีความหนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่นและมีค่าเท่ากับ 3 mm. ลักษณะการรองรับ คือ ตลอดความยาวขอบ $y = \pm b/2$ แผ่นบางรองรับแบบหนีบยึด และที่ตลอดความยาวขอบ $x = 0, x = a$ แผ่นบางรองรับแบบธรรมดา ถูกกระทำด้วยภาระกระจายสม่ำเสมอ มีค่าเท่ากับ 2000 N/m² 500 N/m² 3000 N/m² 3500 N/m² และ 4000 N/m² ตามลำดับ เปลี่ยนขนาดแผ่นบางทั้งหมด 14 ขนาด รายละเอียดแสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงรายละเอียดขนาดของแผ่นบาง

อัตราส่วน b/a	ด้านกว้าง (a) mm.	ด้านยาว (b) mm.
0.2	500	100
0.4	500	200
0.6	500	300
0.8	500	400
1.0	500	500
1.2	500	600
1.4	500	700
1.6	500	800
1.8	500	900
2.0	500	1000
2.5	500	1250
3.0	500	1500
3.5	500	1750
4.0	500	2000

2.1 ระยะแอนตัวและความเค้นของแผ่นบางโดยวิธีของ Lévy – Nádai [6,7]

คำนวณหาระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางโดยวิธีของ Lévy – Nádai จากสมการ (2.1) และหาค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดจากสมการ (2.2) โดยเปลี่ยนขนาดของแผ่นบาง และภาระที่กระทำกับแผ่นบาง ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[\frac{1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b}}{+ \frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b}} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$+ \frac{2pa^3}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)] \sin \frac{m\pi x}{a}}{[\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)] m^4 \cosh \alpha_m}$$

$$* \left(\frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

(2.1)

โดยที่

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

และสมการความเค้นที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด คือ

$$\sigma_y = \frac{6M_y}{h^2} \tag{2.2}$$

โดยที่

$$M_y = \frac{4pa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)}$$

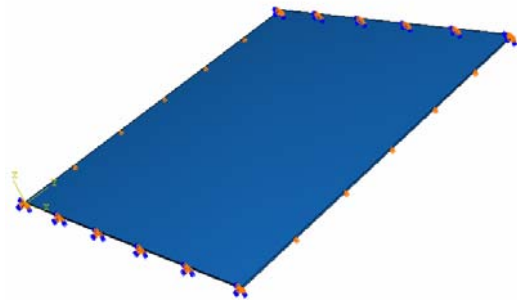
2.2 การวิเคราะห์แบบจำลองแผ่นบางทางไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์แบบจำลองแผ่นบางทางไฟไนต์เอลิเมนต์ [8,9,10] เพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด (N_y) จะใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ABAQUS 6.5 ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

2.2.1 สร้างแบบจำลองของแผ่นบางตามขนาดที่ได้กำหนดไว้ โดยใช้โปรแกรม Solid Work แล้วนำเข้ามาทำการวิเคราะห์ในโปรแกรม ABAQUS 6.5

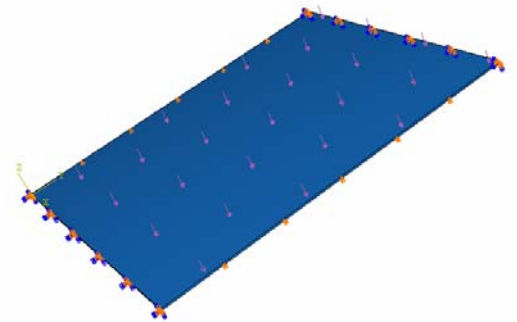
2.2.2 กำหนดคุณสมบัติวัสดุของแบบจำลองแผ่นบาง โดยกำหนดให้แบบจำลองแผ่นบางมีความยืดหยุ่นเชิงเส้น และมีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันในทุกทิศทาง โดยมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ 207 GPa และค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3

2.2.3 กำหนดเงื่อนไขขอบของแบบจำลองแผ่นบาง โดยที่ตลอดความยาวขอบ $y = \pm b/2$ แผ่นบางรองรับแบบหนีบยึด และที่ตลอดความยาวขอบ $x = 0, x = a$ แผ่นบางรองรับแบบธรรมดา แสดงดังรูปที่ 2



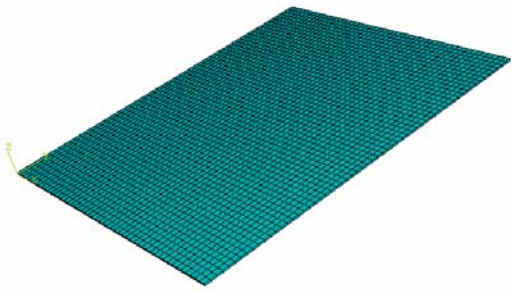
รูปที่ 2 ลักษณะการรองรับของแผ่นบาง

2.2.4 กำหนดภาระที่กระทำกับแบบจำลองแผ่นบาง เป็นแบบภาระกระทำสม่ำเสมอทั่วทั้งแผ่นบาง แสดงดังรูปที่ 3



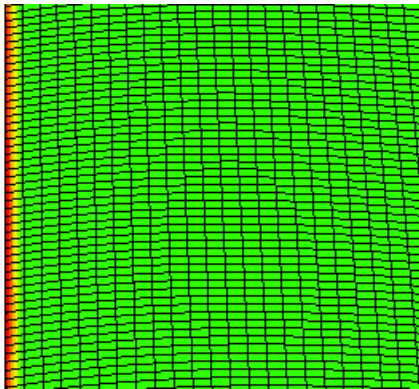
รูปที่ 3 ภาระที่กระทำกับแผ่นบาง

2.2.5 แบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองแผ่นบาง โดยกำหนดให้รูปร่างเอลิเมนต์ของแบบจำลองแผ่นบางเป็นแบบเอลิเมนต์สามมิติ ทรง 6 หน้า (Hexahedron) ชนิดด้านตรง 8 จุดต่อ แสดงดังรูปที่ 4



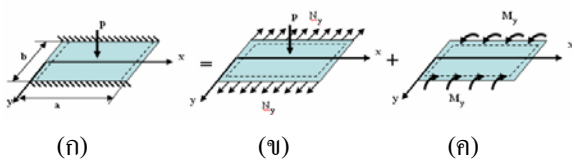
รูปที่ 4 การแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นบาง

2.2.6 ให้โปรแกรมทำการวิเคราะห์แบบจำลองแผ่นบาง โดยได้ผลลัพธ์การกระจายของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด แสดงดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 การกระจายแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด

2.3 ระยะแอนตัวและความเค้นของแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย [6,11]



รูปที่ 6 การทับซ้อนของแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

การหาระยะแอนตัวและความเค้นของแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

2.3.1 หาสมการระยะแอนตัวของแผ่นบาง พิจารณารูปที่ 6 (ก) ระยะแอนตัวของแผ่นบางเกิดจากการทับซ้อนของแผ่นบางสองแผ่น คือ (1) แผ่นบางรองรับแบบธรรมดา ทั้งสี่ด้านอยู่ภายใต้การกระทำกระจายสม่ำเสมอและแรงดึงในแนวระนาบของแผ่นบาง ดังรูปที่ 6 (ข) และ (2) แผ่นบางรองรับแบบธรรมดาทั้งสี่ด้านถูกกระทำด้วยโมเมนต์ตลอดความยาวขอบทั้งสองด้าน ดังรูปที่ 6 (ค)

ซึ่งสามารถเขียนสมการระยะแอนตัวได้ คือ

$$w = w_1 + w_2 \quad (2.3)$$

โดยที่สมการควบคุมของแผ่นบางในกรณีนี้ คือ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & = \frac{1}{D} \left[p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned}$$

พิจารณาแผ่นบางแผ่นที่หนึ่งซึ่งระยะแอนตัวที่ตำแหน่งใดๆ อยู่ในรูปอนุกรม คือ

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right]$$

และการกระจายสม่ำเสมอทั่วทั้งแผ่นบางอยู่ในรูปของอนุกรม คือ

$$P = \frac{16p}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right]$$

จะทำให้ได้สมการระยะแอนตัวของแผ่นบางแผ่นที่หนึ่ง คือ

$$w_1 = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right]}{mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_y}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]}$$

พิจารณาแผ่นบางแผ่นที่สองซึ่งระยะแอนตัวที่ตำแหน่งใดๆ อยู่ในรูปอนุกรม คือ

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(y \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

โดยที่

$$C_m = -\frac{aM_m}{2Dm\pi \cosh \alpha_m}$$

และ

$$M_m = \frac{32pm}{ab\pi^4 [\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{m \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_y}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]}$$

จะทำให้ได้สมการระยะแอนตัวของแผ่นบางแผ่นที่สอง คือ

$$w_2 = \frac{16p}{Db\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{[\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)] \cosh \alpha_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{m \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_y}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]} \right)$$

แทน w_1 และ w_2 ลงในสมการ(2.3) จะได้สมการระยะแอนตัวของแผ่นบาง คือ

$$w = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right]}{mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_y}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]} + \frac{16p}{Db\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{[\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)] \cosh \alpha_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{m \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_y}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]} \right) \quad (2.4)$$

2.3.2 หาสมการความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบาง โดยที่ความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบางในกรณีนี้ประกอบด้วยความเค้นที่เกิดจากโมเมนต์ดัดและแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\sigma_y = \frac{6M_y}{h^2} + \frac{N_y}{h} \quad (2.5)$$

โดยที่ M_y คือโมเมนต์ที่กระทำกับแผ่นบางที่หน้าตัดตั้งฉากกับแกน y ณ ตำแหน่งใดๆ และหาได้จากสมการ

$$M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

ส่วนโมเมนต์ที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด หาได้จากสมการ คือ

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{32pm}{ab\pi^4 [\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{m \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_y}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]}$$

2.3.3 คำนวณหาระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางจากสมการ (2.4) และค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดจากสมการ (2.5) โดยใช้ค่าแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดจากการวิเคราะห์แบบจำลองแผ่นบางทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ในหัวข้อที่ 2.2

3. ผลการวิจัย

3.1 ระยะแอนตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบางโดยวิธีของ Lévy – Nádai

ตารางที่ 2 ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางโดยวิธีของ Lévy – Nádai

อัตราส่วน b/a	ระยะแอนตัว (w) (mm.)				
	$x = a/2, y = 0$				
	P=2000 (Pa)	P=2500 (Pa)	P=3000 (Pa)	P=3500 (Pa)	P=4000 (Pa)
0.2	0.00102	0.00128	0.00154	0.00179	0.00205
0.4	0.01641	0.02052	0.02462	0.02873	0.03283
0.6	0.08062	0.10078	0.12094	0.14109	0.16125
0.8	0.22819	0.28524	0.34229	0.39934	0.45639
1.0	0.46823	0.58529	0.70235	0.81941	0.93647
1.2	0.78017	0.97521	1.17026	1.36530	1.56034
1.4	1.12661	1.40826	1.68991	1.97156	2.25321
1.6	1.47078	1.83847	2.20617	2.57386	2.94156
1.8	1.78706	2.23382	2.68059	3.12735	3.57412
2.0	2.06254	2.57817	3.0938	3.60944	4.12507
2.5	2.56391	3.20489	3.84586	4.48684	5.12782
3.0	2.85293	3.56617	4.27940	4.99263	5.70587
3.5	3.01023	3.76279	4.51534	5.26790	6.02046
4.0	3.09326	3.86657	4.63989	5.41320	6.18652

ตารางที่ 3 ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดของแผ่นบางโดยวิธีของ Lévy – Nádai

อัตราส่วน b/a	ความเค้น (σ_y) (MPa)				
	$x = a/2, y = b/2$				
	P=2000 (Pa)	P=2500 (Pa)	P=3000 (Pa)	P=3500 (Pa)	P=4000 (Pa)
0.2	1.1307	1.41337	1.6960	1.97871	2.2614
0.4	4.5041	5.62677	6.7521	7.87747	9.0028
0.6	10.0331	12.5414	15.0497	17.5580	20.0663
0.8	16.7104	20.8879	25.0655	29.2431	33.4207
1.0	23.2995	29.1243	34.9493	40.7741	46.5990

ตารางที่ 3 (ต่อ) ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดของแผ่นบางโดยวิธีของ Lévy – Nádai

อัตราส่วน b/a	ความเค้น (σ_y) (MPa)				
	$x = a/2, y = b/2$				
	P=2000 (Pa)	P=2500 (Pa)	P=3000 (Pa)	P=3500 (Pa)	P=4000 (Pa)
1.2	28.9463	36.1829	43.4195	50.6561	57.8927
1.4	33.2897	41.6122	49.9346	58.2571	66.5795
1.6	36.3648	45.4560	54.5473	63.6385	72.7293
1.8	38.4118	48.0148	57.6177	67.2207	76.8233
2.0	39.7150	49.6438	59.5725	69.5013	79.4300
2.5	41.1657	51.4572	61.7486	72.0400	82.3313
3.0	41.5564	51.9455	62.3346	72.7240	83.1127
3.5	41.6553	52.0691	62.4829	72.8967	83.3107
4.0	41.6795	52.0993	62.5192	72.9393	83.3587

3.2 ระยะแอนตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

ตารางที่ 4 ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

อัตราส่วน b/a	ระยะแอนตัว (w) (mm.)				
	$x = a/2, y = 0$				
	P=2000 (Pa)	P=2500 (Pa)	P=3000 (Pa)	P=3500 (Pa)	P=4000 (Pa)
0.2	0.00102	0.00128	0.00154	0.00179	0.00205
0.4	0.01636	0.02043	0.02449	0.02855	0.03260
0.6	0.07957	0.09913	0.11855	0.13784	0.15700
0.8	0.22228	0.27601	0.32903	0.38136	0.43300
1.0	0.45089	0.55833	0.66377	0.76726	0.86887
1.2	0.74664	0.92321	1.09600	1.26509	1.43063
1.4	1.07599	1.32979	1.57793	1.82057	2.05790
1.6	1.40667	1.73906	2.06422	2.38241	2.69386
1.8	1.71495	2.12189	2.52064	2.91141	3.29441
2.0	1.98778	2.46194	2.92749	3.38468	3.83357
2.5	2.49778	3.10154	3.69730	4.28522	4.86542

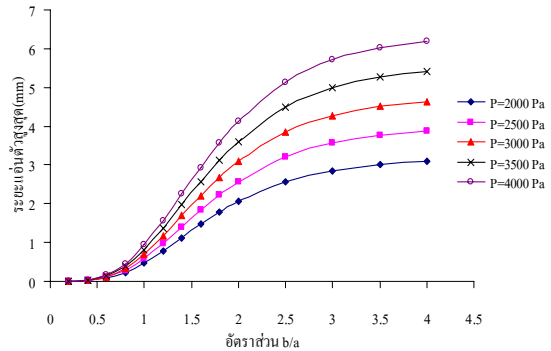
ตารางที่ 4 (ต่อ) ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

อัตราส่วน b/a	ระยะแอนตัว (w) (mm.) $x = a/2, y = 0$				
	P=2000 (Pa)	P=2500 (Pa)	P=3000 (Pa)	P=3500 (Pa)	P=4000 (Pa)
3.0	2.80348	3.48828	4.16674	4.83898	5.50482
3.5	2.97689	3.70960	4.43764	5.16101	5.87969
4.0	3.07301	3.83338	4.59050	5.34425	6.09477

ตารางที่ 5 ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดของแผ่นบางที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

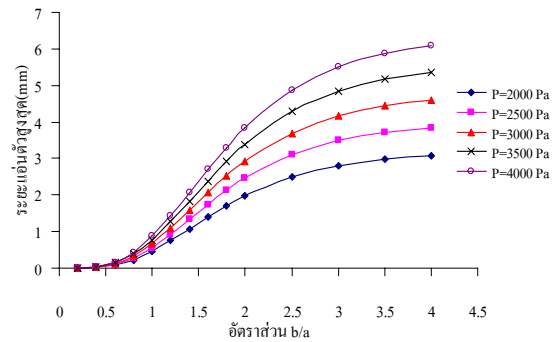
อัตราส่วน b/a	ความเค้น (σ_y) (MPa) $x = a/2, y = b/2$				
	P=2000 (Pa)	P=2500 (Pa)	P=3000 (Pa)	P=3500 (Pa)	P=4000 (Pa)
0.2	1.19607	1.49496	1.79377	2.09255	2.39128
0.4	4.84032	6.04012	7.23598	8.42771	9.61553
0.6	10.6128	13.1880	15.7329	18.2486	20.7353
0.8	17.2849	21.3638	25.3522	29.2535	33.0704
1.0	23.6388	29.0863	34.3670	39.4888	44.4596
1.2	29.0186	35.6199	41.9895	48.1401	54.0836
1.4	33.2235	40.7420	47.9832	54.9630	61.6969
1.6	36.3048	44.5264	52.4464	60.0825	67.4512
1.8	38.4535	47.1944	55.6261	63.7657	71.6287
2.0	39.8945	49.0066	57.8117	66.3268	74.5655
2.5	41.6222	51.2303	60.5526	69.6036	78.3965
3.0	42.0904	51.8664	61.3758	70.6326	79.6486
3.5	42.1083	51.9175	61.4721	70.7857	79.8708
4.0	42.1154	51.9262	61.4824	70.7976	79.8842

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะแอนตัวของแผ่นบาง (w) ต่ออัตราส่วน b/a



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางต่ออัตราส่วน b/a กรณีใช้วิธีของ

Lévy – Nádai

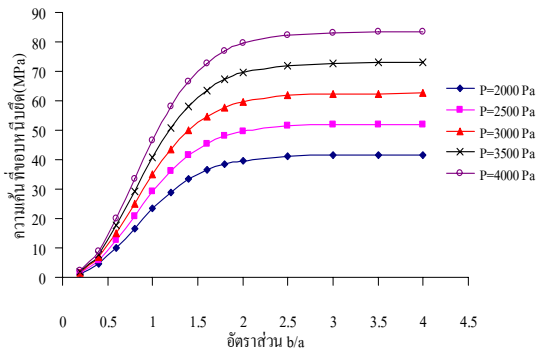


รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางต่ออัตราส่วน b/a กรณีที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

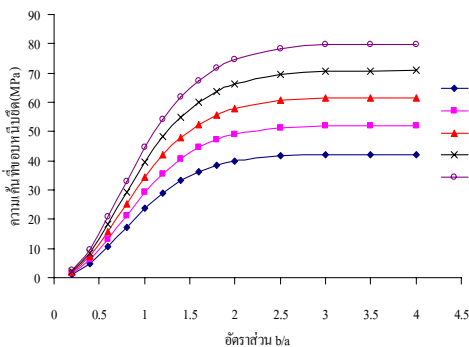
จากการพิจารณารูปที่ 7 และรูปที่ 8 พบว่าแนวโน้มอัตราการเพิ่มขึ้นของระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางต่ออัตราส่วน b/a ของทั้งสองกรณี คือ กรณีใช้วิธีของ Lévy – Nádai และกรณีที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย เป็นไปในทิศทางเดียวกัน โดยสามารถสรุปได้ คือ ถ้าอัตราส่วน b/a เพิ่มขึ้น ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย โดยในช่วงที่อัตราส่วน b/a ตั้งแต่ 0.6 ถึง 3 อัตราการเพิ่มขึ้นของระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางจะมีค่าสูง ส่วนช่วงที่อัตราส่วน b/a

ตั้งแต่ 3 ขึ้นไป อัตราการเพิ่มขึ้นของระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางจะน้อยลงจนเริ่มคงที่ที่อัตราส่วน b/a มากกว่า 4 นั้นแสดงว่า ระยะแอนตัวของแผ่นบางจะมีค่าคงที่ในกรณีที่แผ่นบางมีความกว้างคงที่แต่มีความยาวมากขึ้น

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบาง (σ_y) ต่ออัตราส่วน b/a



รูปที่ 9 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึด (σ_y) ต่ออัตราส่วน b/a กรณีใช้วิธีของ Lévy – Nádai



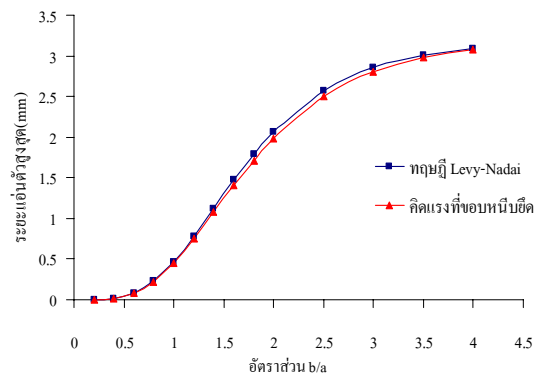
รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึด (σ_y) ต่ออัตราส่วน b/a กรณีที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย

จากการพิจารณารูปที่ 9 และรูปที่ 10 พบว่า แนวโน้มอัตราการเพิ่มขึ้นของความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึดต่ออัตราส่วน b/a ของทั้งสองกรณีเป็นไปในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือ ถ้าอัตราส่วน b/a

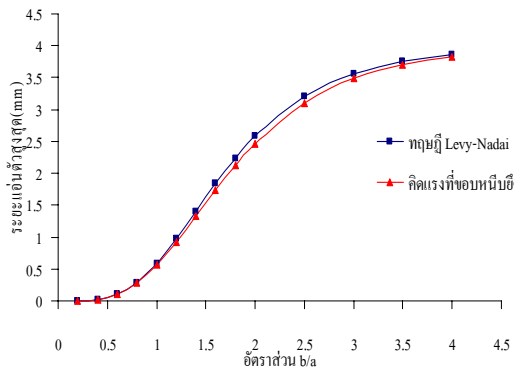
เพิ่มขึ้น ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึดก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย โดยในช่วงที่อัตราส่วน b/a ตั้งแต่ 0.2 ถึง 2 อัตราการเพิ่มขึ้นของความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึดจะมีค่าสูง ส่วนช่วงที่อัตราส่วน b/a ตั้งแต่ 2 ขึ้นไป อัตราการเพิ่มขึ้นของความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึดจะน้อยลงจนเริ่มคงที่ ที่อัตราส่วน b/a มากกว่า 2.5 นั้นแสดงว่า ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของบรรองรับแบบหนีบยึดจะมีค่าคงที่ในกรณีที่แผ่นบางมีความกว้างคงที่แต่มีความยาวมากขึ้น ถึงแม้ว่าความยาวของแผ่นบางจะเพิ่มขึ้นมากเท่าไรก็ตาม

3.5 เปรียบเทียบระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบาง

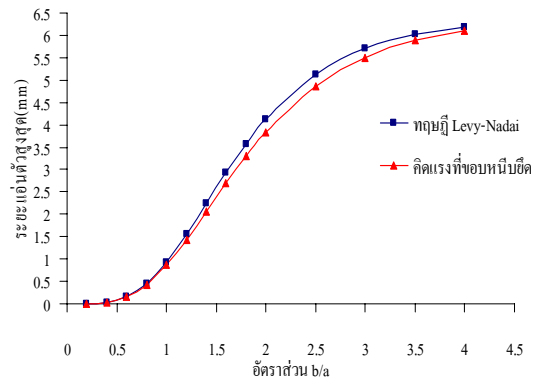
การเปรียบเทียบระยะแอนตัวของแผ่นบาง กรณีที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วยเทียบกับการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai แสดงดังรูปที่ 11 ถึงรูปที่ 15



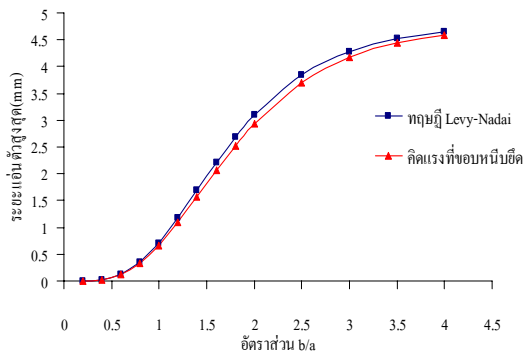
รูปที่ 11 เปรียบเทียบระยะแอนตัว โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้ภาระกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 2000 N/m^2



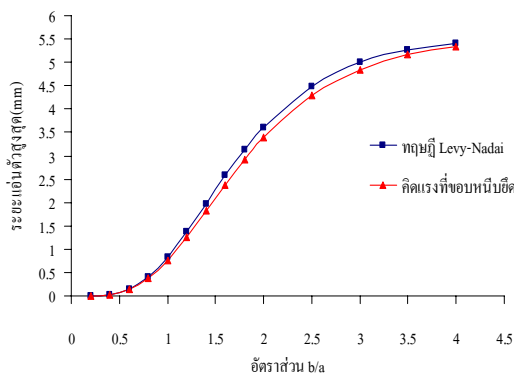
รูปที่ 12 เปรียบเทียบระยะแอ่นตัว โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้การกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 2500 N/m^2



รูปที่ 15 เปรียบเทียบระยะแอ่นตัว โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้การกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 4000 N/m^2



รูปที่ 13 เปรียบเทียบระยะแอ่นตัว โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้การกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 3000 N/m^2



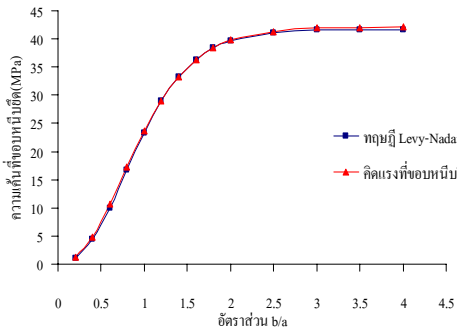
รูปที่ 14 เปรียบเทียบระยะแอ่นตัว โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้การกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 3500 N/m^2

จากการพิจารณารูปที่ 11 ถึง รูปที่ 15 พบว่า ระยะแอ่นตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะมีค่าน้อยกว่าการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai ในทุกๆอัตราส่วน b/a นั้นแสดงให้เห็นว่าแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดจะส่งผลให้ระยะแอ่นของแผ่นบางมีค่าลดลง โดยในช่วงที่อัตราส่วน b/a น้อยๆ ไม่เกิน 0.6 ระยะแอ่นตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะมีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณโดยวิธีของ Lévy–Nádai แต่ถ้าอัตราส่วน b/a มีค่าเพิ่มสูงขึ้นอยู่ในช่วง 0.8 ถึง 3.0 ระยะแอ่นตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วยจะมีค่าน้อยกว่าการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai เพิ่มมากขึ้น และถ้าอัตราส่วน b/a มากกว่า 3.0 ระยะแอ่นตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะเริ่มมีค่าใกล้เคียงกับวิธีของ Lévy – Nádai อีกครั้ง

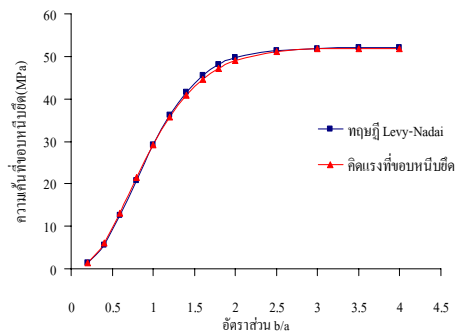
3.6 เปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึด

การเปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับหนีบยึด กรณีที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับ

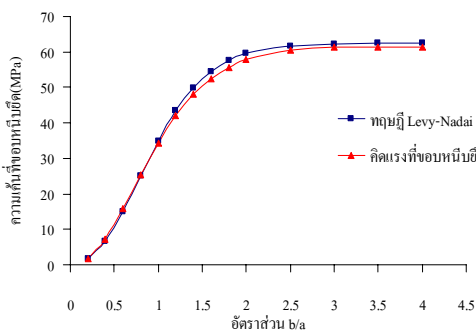
รับแบบหนีบยึดร่วมด้วย เทียบกับการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai แสดงดังรูปที่ 16 ถึงรูปที่ 20



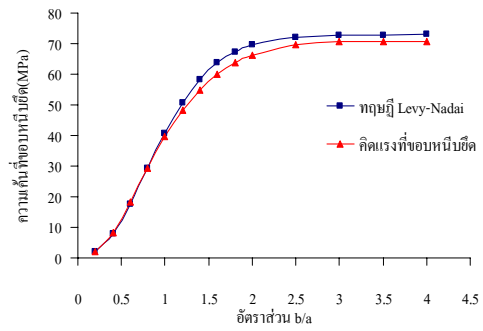
รูปที่ 16 เปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึด โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้ภาระกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 2000 N/m²



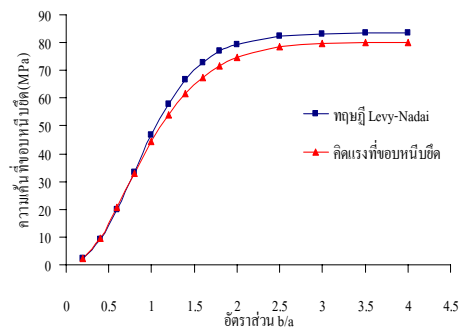
รูปที่ 17 เปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึด โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้ภาระกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 2500 N/m²



รูปที่ 18 เปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึด โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้ภาระกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 3000 N/m²



รูปที่ 19 เปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึด โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้ภาระกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 3500 N/m²



รูปที่ 20 เปรียบเทียบความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึด โดยที่แผ่นบางอยู่ภายใต้ภาระกระจายสม่ำเสมอ เท่ากับ 4000 N/m²

จากการพิจารณารูปที่ 16 ถึงรูปที่ 20 และตารางที่ 3 กับตารางที่ 5 พบว่า แรงปฏิกิริยาที่ข้อรองรับแบบหนีบยึดมีผลต่อค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึด ดังนี้ ในช่วงที่อัตราส่วน b/a น้อยๆ ไม่เกิน 0.8 แรงปฏิกิริยาที่ข้อรองรับแบบหนีบยึดจะส่งผลให้ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึดที่คำนวณโดยสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ข้อรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย มีค่าสูงกว่าที่คำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai โดยมีความแตกต่างมากที่สุด 6.946 เปอร์เซ็นต์ ตำแหน่งอัตราส่วน b/a เท่ากับ 0.4 ภายใต้ภาระกระทำเท่ากับ 2000 N/m² ส่วนในช่วงที่อัตราส่วน b/a ค่อยๆ เพิ่มมากขึ้น ตั้งแต่ 0.8 ขึ้นไป ค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรองรับแบบหนีบยึดที่คำนวณโดยสมการที่คิด

ผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะเริ่มมีค่าลดลงน้อยกว่าที่คำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai และมีแนวโน้มที่จะลดลงเรื่อยๆ จนค่าความเค้นเริ่มคงที่เมื่ออัตราส่วน b/a มีค่ามากกว่า 2.5 นั้นแสดงให้เห็นว่า ในกรณีที่แผ่นบางมีความยาวน้อยกว่า ผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดจะมีผลต่อค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบรองรับแบบหนีบยึดมาก แต่ในทางตรงกันข้าม ถ้าแผ่นบางมีความยาวเพิ่มมากขึ้น ผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด จะมีผลต่อค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบรองรับแบบหนีบยึดน้อย และในส่วนของภาวะที่กระทำกับแผ่นบางที่มีผลต่อความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบรองรับแบบหนีบยึด พบว่า ถ้าเพิ่มภาวะที่กระทำกับแผ่นบางมากขึ้น ค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบรองรับแบบหนีบยึดที่คำนวณโดยสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย ก็จะยังมีค่าน้อยกว่าที่คำนวณด้วยวิธีของ Lévy – Nádai

4. สรุปผลการวิจัย

4.1 สมการระยะแอนตัวและความเค้นของแผ่นบาง

4.1.1 สมการระยะแอนตัวของแผ่นบางที่รองรับแบบหนีบยึดที่ขอบ $y = \pm b/2$ และรองรับแบบธรรมดาที่ขอบ $x = 0$, $x = a$ อยู่ภายใต้การกระจายสม่ำเสมอ (p) โดยที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย คือ

$$w = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right]}{mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]} + \frac{16p}{Db\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1) \right] \cosh \alpha_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{m \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]} \right)$$

4.1.2 สมการความเค้นที่ขอบรองรับแบบหนีบยึด ในกรณีที่แผ่นบางรองรับแบบหนีบยึดที่ขอบ $y = \pm b/2$

และรองรับแบบธรรมดาที่ขอบ $x = 0$, $x = a$ อยู่ภายใต้การกระจายสม่ำเสมอ (p) โดยที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย คือ

$$\sigma_y = \frac{6M_y}{h^2} + \frac{N_y}{h}$$

โดยที่

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{32pm}{ab\pi^4 [\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{m \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N}{D} \left(\frac{n}{\pi b} \right)^2 \right]}$$

4.2 ผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดต่อระยะแอนตัวของแผ่นบาง

แรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดจะส่งผลให้ระยะแอนของแผ่นบางมีค่าลดลง โดยในช่วงที่อัตราส่วน b/a น้อยๆ ไม่เกิน 0.6 ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วยและการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai จะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ถ้าอัตราส่วน b/a มีค่าเพิ่มสูงขึ้นอยู่ในช่วง 0.8 ถึง 3.0 ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะมีค่าน้อยกว่าการคำนวณโดยวิธีของ Lévy – Nádai เพิ่มมากขึ้น และถ้าอัตราส่วน b/a มากกว่า 3.0 ระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางที่คำนวณได้จากสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะเริ่มมีค่าใกล้เคียงกับวิธีของ Lévy – Nádai อีกครั้ง

4.3 ผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดต่อความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นบาง

ในช่วงที่อัตราส่วน b/a น้อยๆ ไม่เกิน 0.8 ความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบรองรับแบบหนีบยึดที่คำนวณโดยสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดร่วมด้วย จะมีค่าสูงกว่าที่คำนวณด้วยวิธีของ Lévy–

Nádai โดยมีความแตกต่างมากที่สุด 6.946 เปอร์เซ็นต์ ส่วนในช่วงที่อัตราส่วน b/a ค่อยๆ เพิ่มมากขึ้น ตั้งแต่ 0.8 ขึ้นไป ค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดที่คำนวณ โดยสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดรวมด้วย จะเริ่มมีค่าลดลงน้อยกว่าที่คำนวณด้วยวิธีของ Lévy – Nádai และมีแนวโน้มที่จะลดลงเรื่อยๆ จนค่าความเค้นเริ่มคงที่เมื่ออัตราส่วน b/a

มีค่ามากกว่า 2.5 และในส่วนผลของภาระที่กระทำกับแผ่นบางที่มีผลต่อความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึด พบว่า ถ้าเพิ่มภาระที่กระทำกับแผ่นบางมากขึ้น ค่าความเค้นที่ตำแหน่งกึ่งกลางขอบรองรับแบบหนีบยึดที่คำนวณ โดยสมการที่คิดผลของแรงปฏิกิริยาที่ขอบรองรับแบบหนีบยึดรวมด้วย ก็จะยังมีค่าน้อยกว่าที่คำนวณโดยวิธีของ Lévy - Nádai

เอกสารอ้างอิง

- [1] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข. (2546). “การวิเคราะห์การโค้งงอ ของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขอบสองด้านรองรับด้วยคานอิลาสติกและอีกสองด้านปล่อยอิสระ โดยรับภาระแบบกระจายบาง ส่วนและแบบเป็นเส้น”. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [2] กุศยาพร นาคพิน. (2546). “ การวิเคราะห์การ โค้งงอ ของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงข้ามขอบสองด้านแบบคานและอีกสองด้านปล่อยอิสระ”. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [3] ชไมพร สุขแจ่มศรี.(2549). “การวิเคราะห์การแอ่นตัวของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขอบสองด้านแบบคานอีกสองด้านปล่อยอิสระ โดยมีการรองรับที่มุมและเสากลาง”. วิทยานิพนธ์ ปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [4] Mbakogu,F.C.,and Pavlovic,M.N.(2000). “*Bending of clamped orthotropic rectangular plates: a variational symbolic solution*”. *Computer & Structure*.
- [5] Thornton,D.R.,and Conway,H.D.(1980). “*The structural analysis of edge-loaded plates*”. *Int.J.Mech.Sci*
- [6] Timoshenko, S.P.,and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill
- [7] Timoshenko, S.P.,and Goodier, J.N. (1970). *Theory of Elasticity*. Third Edition. New York: McGraw-Hill
- [8] ชงชัย ฟองสมุทร. (2549). *วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เบื้องต้น*. โครงการตำราภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [9] เศษ พุทธเจริญทอง. (2541). *การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์*. กรุงเทพฯ :ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ
- [10] ปราโมทย์ เศษอำไพ. (2542). *ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [11] Ugral, A.U. (1981). *Stresses in Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill